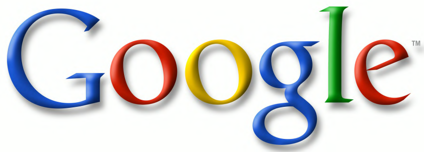
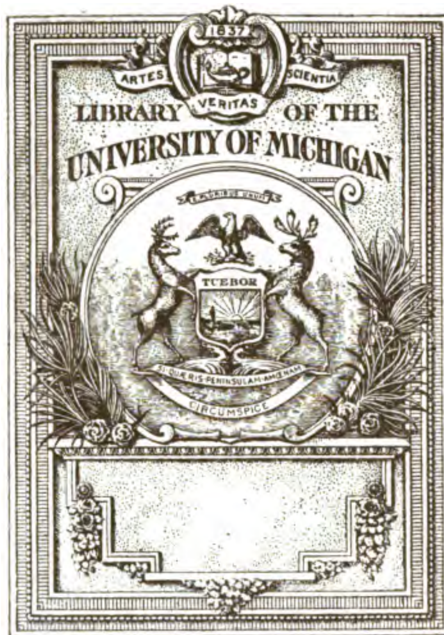



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

2266

Alexander Ziwet

3.?

Anleitung zur Berechnung

GEODÄTISCHER COORDINATEN.

Von

Prof. Dr. OTTO BÖRSCH,

Sectionschef im Königl. preussischen geodätischen Institut.

Mit zwei Figurentafeln.

Zweite vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage.

CASSEL,

Verlag von A. Freyschmidt,

Hof-Buch- und Kunst-Handlung.

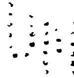
1885.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-16-1923

SR. EXCELLENZ HERRN GENERALLIEUTENANT

DR. J. J. BAEYER,

PRÄSIDENTEN DES KÖNIGL. PREUSS. GEODÄTISCHEN INSTITUTS UND DES CENTRAL-BUREAUS DER EUROPÄISCHEN GRADMESSUNG, RITTER HÖCHSTER ORDEN,



IN AUFRICHTIGER VEREHRUNG

GEWIDMET

VOM

VERFASSER.

VORWORT.

Die im Jahre 1868 erschienene erste Auflage der „Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen, sphärischen Coordinaten etc.“ wurde durch die in dem Regierungsbezirke Cassel der Provinz Hessen-Nassau angeordnete Vermessung zum Zwecke einer anderweiten Grundsteuerveranlagung hervorgerufen. Bei der Eile, mit welcher die Publication betrieben werden musste, konnte durchgängige Gründlichkeit um so weniger erreicht werden, als der Verfasser anfangs dienstlich vielfach in anspruch genommen war und später am Druckorte nicht anwesend sein konnte. Dass aber trotz der vielen störenden Druckfehler und sonstiger eingeschlichener Unrichtigkeiten und trotz des Umstandes, dass die Arbeit nur speciell für die Vermessungsarbeiten im ehemaligen Kurhessen bestimmt war, und deshalb der Leserkreis verhältnismässig nur ein beschränkter sein konnte, dennoch eine zweite Auflage nötig wurde, lässt darauf schliessen, dass der Stoff und die Art der Darstellung der behandelten, geodätischen Aufgaben Anklang gefunden hat.

In der vorliegenden zweiten Auflage ist der Verfasser bestrebt gewesen, die Mängel und Lücken der ersten Auflage zu beseitigen, und das Ganze so umzuarbeiten und zu erweitern, dass, nach Hinzufügung der notwendigen, mathematischen Hülfslehren, dem praktischen Feldmesser und dem in der mathematischen Analyſis weniger Geübten jede Frage über die Ableitung der Formeln und über die Berechnung geodätischer Coordinaten beantwortet wird.

Durch Aufnahme der Besselschen Formeln für die Berechnung und Verteilung des sphäroidischen Excesses, für die sphäroidische Polhöhen- und Azimutübertragung und für die Berechnung der geodätischen Linie und ihrer Azimute nebst der dazugehörigen Tafel II., ferner durch Erweiterung der Hülfstafel I. für geodätische Berechnungen innerhalb ganz Europas und der Tafel III. zur gegenseitigen Verwandlung von Logarithmen der Bogen, Sinus und Tangenten werden aber auch für die Lösung von Aufgaben aus dem Gebiete der höheren Geodäsie, namentlich solcher zu Gradmessungszwecken, die Mittel geboten.

Eine besondere Sorgfalt ist auf die Korrektheit der Tafeln verwendet worden. Die in dankenswertester Weise gemachten Mitteilungen der bis jetzt noch nicht publicierten, geodätischen Tafeln für die italienischen und norwegischen Vermessungen durch die Bevollmächtigten für die europäische Gradmessung, die Herren L. de Stefanis, Oberstlieutenant im militär-geographischen Institute in Florenz, und W. Haffner, Oberstlieutenant und Chef der Generalquartiermeister-Abteilung im Generalstabe in Christiania, sowie die Benutzung der bereits publicierten Tafeln des Kaiserl. Königl. militär-geographischen Instituts in Wien und der Königl. preuss. Landesaufnahme machten es dem Verfasser möglich, eine genaue Prüfung seiner Tafelberechnungen ausführen zu können.

Bei Abfassung des Ganzen hat mir mein Sohn, Dr. A. Börsch, mit seinem schätzenswerten Rate und mit eifriger, thätiger Unterstützung zur Seite gestanden. Ihm und Herrn Dr. L. Krüger, Assistenten im Königl. preuss. geodätischen Institut, sage ich für die mit so vielen Mühen verknüpfte Übernahme der Durchsicht und der Korrektur des Drucks meinen ganz besonderen Dank.

Berlin, im September 1884.

O. Börsch.

INHALT.

EINLEITUNG.

Ist ein Dreiecksnetz über einen so kleinen Teil unserer Erdoberfläche ausgespannt, dass nicht allein jedes Dreieck für sich als ein ebenes, sondern auch das ganze Netz als in einer Ebene liegend angenommen werden kann, wie dieses bei Gemarkungs-, Forst- und dergleichen Vermessungen der Fall ist, so wird man, von einer bekannten Seite und der Richtung des geographischen Meridianes eines Dreieckspunktes ausgehend, durch alleinige Winkelmessungen in den Stand gesetzt, nicht nur sämmtliche Dreiecke, sondern auch die Lage der einzelnen Dreieckspunkte in Bezug auf ein ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Abscissenaxe ein Meridian ist, mit Hülfe der Formeln der ebenen Trigonometrie zu berechnen. Ein gewissenhafter Feldmesser der Vorzeit mass zu dem Zwecke zwei möglichst weit von einander entfernte Dreiecksseiten, wovon die eine zur Kontrolle diente, direkt mit der Messkette oder Messlatten, und mit einer Bussole (Feldmessercompass) die magnetischen und, durch Anbringung der magnetischen Declination, die geographischen Azimute der Dreiecksseiten und hatte somit alles Erforderliche zur Dreiecks- und Coordinatenberechnung. Diese Methode hatte bei grosser Bequemlichkeit, indem sich jedes Netz ganz von selbst orientierte, ihre vollständige Berechtigung, so lange man sich noch keine Anschlüsse an Dreiecksseiten, beziehungsweise Coordinatensysteme höherer Ordnung verschaffen konnte, und dem Geometer noch kein exacteres Instrument für die Winkelmessungen zu Gebote stand.*) Was soll man aber bei dem Fortschritte der geodätischen Wissenschaft, der Vervollkommnung der Instrumente und der immer grösseren Verbreitung der trigonometrischen Landesaufnahmen dazu sagen, wenn noch vor fünfzehn und weniger Jahren ein nicht unerheblicher Teil deutscher Feldmesser und Forstgeometer auf die Unfehlbarkeit der Bussole und Kette und die Unantastbarkeit der darauf gegründeten Berechnungsresultate schwor? Dem Verfasser ist sogar aus jener Zeit ein Fall bekannt — und derselbe dürfte nicht vereinzelt dastehen —, wo ein Vermessungsbeamter, zum Zwecke der Grundstück-Zusammenlegung einer Gemarkung, ein Dreieck, dessen einer Seite vermittelst eines Compasses die Meridianrichtung gegeben wurde, absteckte, die Seiten und ihre beiderseitigen, bis zur Gemarkungsgrenze ausgedehnten Verlängerungen direkt mit der Kette mass, daraus sich die Coordinaten einer Anzahl von Punkten in diesen Linien ableitete und das Übrige mit Kette und Winkelkopf fertig machte.

Die älteste zusammenhängende trigonometrische Aufnahme in Deutschland, welche späteren Katastervermessungen zu grunde gelegt wurde, ist die 1802 bis 1807 durch französische Officiere ausgeführte Triangulierung ersten Ranges in Bayern. Derselben wurden zu dem genannten Zwecke weitere trigonometrische Messungen angeschlossen, welche man 1828 und die folgenden

*) Der Bussole soll in speciellen Fällen, wo es sich z. B. nicht um Bestimmung von Eigentumsgrenzen handelt, auch jetzt noch keineswegs die Berechtigung ihrer Anwendung abgesprochen werden. Kommt aber das in so hohem Werte stehende Grundeigentum in betracht, so ist dieselbe nicht mehr am Platze.

Jahre über ganz Bayern ausdehnte. Soldner, Kgl. Steuerrat und Vorstand der Sternwarte in München, veröffentlichte, um in die ganzen Vermessungen einen Zusammenhang und ein einheitliches System zu bringen, im Jahre 1810 seine Methode zur Berechnung rechtwinkliger, sphärischer Coordinaten, indem alle Punkte der bayerischen Triangulation als auf einer „Berührungskugel" liegend gedacht wurden, welche die bis zu ihrem Durchschnitte mit der Erdaxe verlängerte Normale von München zum Radius hatte.*) Als Nullpunkt wurde der nördliche Frauenturm in München, und als Abscissenaxe sein Meridian gewählt. Für die Pfalz galt die Mannheimer Sternwarte als Indifferenzpunkt. An die sphärischen schlossen sich als Grundlagen für die Gemarkungs-Aufnahmen ebene, rechtwinklige Coordinaten, welche man auf Messtischblätter übertrug. Hieran anschliessend führte man sodann die Parzellarvermessung auf graphischem Wege aus. Dieses Verfahren ist bis in die neueste Zeit beibehalten worden.

Dem Vorgange Bayerns folgten Württemberg, Baden und das Grossherzogtum Hessen.**) Die Nullpunkte gaben die Sternwarten in Tübingen, Mannheim und Darmstadt ab, und ihre Meridiane die Abscissenaxen der Coordinatensysteme. Nur in Württemberg wurde auch der Messtisch adoptiert, jedoch wurden mit der graphischen Aufnahme zugleich Messungen mit dem Distanzmesser, den Messlatten und der Kreuzscheibe verbunden, während in Baden und Hessen bis in das Detail hinein der Theodolit und die Messlatten Anwendung fanden. In Württemberg ist unterdessen an Stelle des früheren Bohnenberger'schen Netzes auf Veranlassung der europäischen Gradmessung in den sechziger Jahren eine neue Triangulation ersten Ranges angeordnet und bereits jetzt beendigt worden, während in Baden das Kgl. preussische geodätische Institut dieselbe Aufgabe gelöst hat.

Soldner hat das grosse Verdienst, für eine sphärische Coordinatenberechnung zuerst die Formeln gegeben und in zweckentsprechender Form in die Praxis eingeführt zu haben. In ihren Principien, wenn auch auf die sphäroidische Gestalt der Erdoberfläche Rücksicht nehmend, finden dieselben noch jetzt ihre Anwendung.

In Hannover wurde von 1821 bis 1844 die hannoversche Gradmessung und trigonometrische Landesaufnahme, in welche auch Braunschweig mit eingeschlossen wurde, durch den grossen Astronomen und Mathematiker Gauss, anfangs persönlich, später unter dessen Leitung, ausgeführt, und von ihm ein eigentümliches, rechtwinkliges, ebenes Coordinatensystem geschaffen. Nach seinen Schriften: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" erhält man durch diese Coordinaten eine conforme Abbildung der entsprechenden Punkte der sphäroidischen Erdoberfläche auf eine Ebene in der Weise, dass die Abbildung in den kleinsten Teilen dem Abgebildeten ähnlich ist.***) Die Projection von 2578 Punkten geschah auf den Mantel eines die Erdoberfläche in dem Meridian von Göttingen berührenden Cylinders, der dann in eine Ebene ausgebreitet gedacht wurde. Veröffentlicht sind diese Coordinaten erst 1868 durch Professor Wittstein in Hannover, welcher auch für die praktische Anwendung noch die Formeln zu den nötigen Ergänzungsberechnungen gegeben hat. Leider kann von diesen Coordinaten in neuerer Zeit kein allgemeiner Gebrauch gemacht werden, da ein grosser Teil der Punkte verloren gegangen ist, oder doch deren Identität nicht mehr nachgewiesen werden kann. Diesem Übel hilft jedoch die Kgl. preussische Landesaufnahme gegenwärtig durch trigonometrische Neumessungen ab.

---

*) Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. Herausgegeben mit höchster Genehmigung von der K. Steuer-Kataster-Commission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des K. Generalstabes. München 1873.

**) Doll, M. Zur Geschichte der Katastervermessungen etc. Separat-Abdruck aus der württembergischen Geometerzeitung.

***) Schreiber, O. Theorie der Projectionsmethode der hannoverschen Landesvermessung. Hannover 1869.

In Kurhessen*) begann Gerling, anschliessend an die hannoverschen Gradmessungsdreiecke, im Jahre 1822 eine trigonometrische Landesaufnahme, welche aber schon im Herbste 1823 abgebrochen, erst in dem Jahre 1835 wieder aufgenommen und 1837 beendigt wurde. Die geographischen Positionen der Dreieckspunkte, wie auch die Zusammenstellung der Logarithmen der Dreiecksseiten und ihrer Azimute wurden seit ihrer Veröffentlichung 1831 bezw. 1839 von den Katasterbehörden in der Weise benutzt, dass weitere Netze niederer Ordnung daran angeknüpft, und schliesslich ein Punkt des Netzes niedrigster Ordnung, meistens der Kirchturm der betreffenden Gemarkung, als Nullpunkt und sein geographischer Meridian als Abscissenaxe für ein ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem ausgewählt wurde. Als endlich im Jahre 1854 nach vollständiger Beendigung der Triangulation 2. und 3. Ordnung der Landesvermessung ein zusammenhängender Landesteil zwischen 50° 4′ und 50° 48′ der Breite und 26° 15′ und 27° 38′ der Länge zum Zwecke der Aufnahme des Grundsteuer-Katasters neu vermessen werden sollte, wurde als Nullpunkt der Kirchturm der St. Martinskirche in Cassel und sein Meridian als Abscissenaxe für alle Landesteile Kurhessens bestimmt, und wurden die Punkte der Landesvermessung, indem man zur Berechnung jedes einzelnen Coordinatenpaares die betreffenden Krümmungsradien verwendete, durch sphäroidische, rechtwinklige Coordinaten darauf bezogen.

Oldenburg**) besitzt, unter Hinzuziehung von Dreiecken des Gaussischen Netzes von Hannover aus dem Jahre 1825, ebenfalls eine, 1829 bis 1831 ausgeführte, trigonometrische Landesaufnahme, deren Ergebnisse als Grundlagen weiterer Vermessungen dienen.

Im Königreiche Sachsen***) wurden 1826 bis 1828 behufs Steuerregulierungen grössere trigonometrische Messungen ausgeführt, und die Resultate in geographischen Positionen gegeben. Eine ganz neue trigonometrische Landesaufnahme wurde, angeregt durch die europäische Gradmessung, im Jahre 1864 begonnen; dieselbe ist jetzt beendigt, und die vollständige Veröffentlichung dieser vorzüglichen Arbeit steht in kurzem bevor.

Durch Schleswig und Holstein†) existierte schon von Schumacher (Astronomen in Altona) eine Dreieckskette als Glied der dänischen Gradmessung. Nach der Einverleibung beider Länder in das Königreich Preussen wurde eine neue trigonometrische Landesaufnahme ausgeführt, und die s. g. Braaker Basis, welche schon früher für Schleswig, Holstein, Hannover, Kurhessen und die Vorländerschen Dreiecke in Rheinland und Westfalen als Basis gedient hatte, im Jahre 1871 von der Kgl. preussischen Landesaufnahme neu gemessen.

Mecklenburg hatte im Jahre 1853 eine trigonometrische Landesaufnahme im Anschlusse an die Netze der Nachbarstaaten begonnen, so dass die unmittelbaren Resultate der Dreiecksberechnung schon 1863 der mitteleuropäischen Gradmessung vorgelegt werden konnten. Seit 1882 ist nun die für einen Staat wie Mecklenburg sehr umfangreiche, gediegene, geodätisch-astronomische Arbeit veröffentlicht††). Dieselbe enthält auch ein Verzeichnis geographischer Positionen und ebener, rechtwinkliger Coordinaten der Dreieckspunkte, letztere bezogen auf den Schlossturm von Schwerin als Nullpunkt und seinen Meridian als Abscissenaxe. Bei der Berechnung dieser Coordinaten ging man von derselben Idee aus, welche auch den Gaussischen Coordinaten von Hannover zu grunde liegt, nämlich ein Bild zu schaffen, welches in den kleinsten Teilen dem Abgebildeten ähnlich ist. Der Gestalt des Landes entsprechend, dessen Ausdehnung

*) Gerling, Ch. L. Beiträge zur Geographie Kurhessens und der umliegenden Gegenden aus der kurhessischen Triangulierung der Jahre 1822 bis 1837. Cassel 1839.

**) Generalbericht der europäischen Gradmessung für das Jahr 1865. Berlin 1866.

***) Kritischer Wegweiser im Gebiete der Landkartenkunde. Berlin 1832/33 Bd. 4 p. 96.

†) Andrä, C. G. Den danske Gradmaaling. Andet Bind. Kjøbenhavn 1872.

††) Grossherzoglich mecklenburgische Landesvermessung. I., II., III., IV. Theil. Ausgeführt unter der wissenschaftlichen Leitung von F. Paschen und herausgegeben von Köhler, Bruhns und Foerster. Schwerin 1882.

von West nach Ost fast das Doppelte beträgt von der in der Richtung des Meridians, wählte man als Projectionsfläche einen Kegelmantel, dessen Spitze in der verlängerten Erdaxe liegt, und welcher eine Zone in der Mitte des Landes so abschneidet, dass die Punkte inmitten der Zone eben so hoch über dem Kegelmantel liegen, als die Punkte an den nördlichen und südlichen Grenzen des Vermessungsrayons unter demselben.

Die trigonometrische Landesvermessung von Nassau*) wurde Ende der fünfziger Jahre vom Obergeometer Wagner begonnen und 1863 veröffentlicht. Dieselbe legt den Berechnungen die Besselschen Elemente des Erdsphäroides zu grunde. Der trigonometrische Punkt Schaumburg giebt für die Coordinaten der Dreieckspunkte den Nullpunkt, sein Meridian die Abscissenaxe ab. Diese Landesaufnahme ist die erste, mit welcher ein grösseres geometrisches Nivellement verbunden wurde.

In Schaumburg-Lippe wurde 1850 eine trigonometrische Vermessung bis zu den Dreiecken 4. Ordnung incl. beendigt und später auch im Anschlusse an eine Nachbartriangulation berechnet. Dieselbe diente vorzugsweise der fürstlichen Forst- und Domänenverwaltung und nebenbei auch zur Feststellung des Grundeigentums im allgemeinen.

Die anhaltischen und thüringischen Herzogtümer sind von den Netzen der preussischen Landesaufnahme überspannt. Mit Dreiecken, bis abwärts zur 4. Ordnung, ist an diese Hauptnetze angeschlossen. Der Name Hansen (Astronom der Seeberger, später nach Gotha verlegten Sternwarte), welcher die Oberleitung des trigonometrischen Teiles der Kataster- und Forstvermessungen in Gotha hatte, bürgt dafür, dass wenigstens in diesem Herzogtume nur Gutes und Zweckentsprechendes geschaffen wurde.

Unter den Vermessungen der thüringischen Herzogtümer muss noch ganz besonders die 1852 begonnene Vermessung in Schwarzburg-Sondershausen hervorgehoben werden. Dieselbe ist das Exacteste, was bis jetzt in Specialvermessungen geliefert worden ist. Auf den Rat des Generallieutenant Baeyer**) — damals Chef der trigonometrischen Abteilung des Kgl. preussischen grossen Generalstabes, jetzt Präsident des Kgl. geodätischen Instituts und des Centralbureaus der europäischen Gradmessung — sind bis in das Detail hinein Martins-Pistorsche Theodolite mit 5-zölligen Horizontal- und Höhenkreisen und mikroskopischer Ablesung verwendet. Die Coordinaten, auch die der dritten Dimension (Höhen), jedes Grenzpunktes sind unmittelbar in Originalzahlen vorhanden. Was aber für unsere rationelle Zeit noch ganz besonders in die Wagschale fällt, ist der Umstand, dass die Kosten der Vermessung nur $^1/_3$ von dem betragen haben, was anderwärts für Specialvermessungen verausgabt wird.

In den alten Provinzen Preussens war die Bussole für Vermessungen zum Zwecke von Grundsteuer-Veranlagungen das alleinige Winkelmessinstrument. Öfters suchte man sogar ohne dasselbe fertig zu werden, freilich war auch das Resultat darnach. Zwar nahm die in den zwanziger Jahren vom Feldmarschall v. Müffling angeregte trigonometrische Landesvermessung ihren Fortgang, aber zu diesbezüglichen Vermessungen fanden ihre Resultate durch weitere Anschlüsse keine Verwendung. In Rheinland und Westfalen dagegen gestaltete sich die Sache anders und besser. Als im Jahre 1824 die Vermessungen zur Aufnahme des Grundsteuer-Katasters daselbst angeordnet wurden, leuchtete dem mit der Leitung dieser Arbeiten beauftragten, damaligen Obergeometer

---

*) Die Landesvermessung des Herzogtums Nassau. (Vom Obergeometer Wagner.) Wiesbaden 1863.

**) J. J. Baeyer. Mein Entwurf zur Anfertigung einer guten Karte von den östlichen Provinzen des preussischen Staates. Ein Beitrag zur Entwickelung der Messkunde in Preussen. Berlin 1868. Indem auf diese kleine, aber inhaltreiche Schrift aufmerksam gemacht wird, kann constatiert werden, dass zwei Forderungen, wenn auch nicht in dem Umfange, wie dieselben schon 1851 gestellt wurden, in Erfüllung gegangen sind: nämlich eine Centralbehörde für die gesammten, staatlichen Vermessungen und der vollständige Bruch mit der früheren Methode der Specialvermessungen.

Vorländer die Notwendigkeit ein, dass man zur Erzielung eines gutbasierten, einheitlichen, rechtwinkligen Coordinatensystems die Katastervermessungen an ein noch zu schaffendes, grösseres Dreiecksnetz, welches allen derzeitigen Anforderungen der Wissenschaft genügte, anschliessen müsse. Da das damalige Preussen für dergleichen kein Geld hatte, so erlangte Vorländer von seiner vorgesetzten Behörde zur Ausführung dieser grossartigen Arbeit aus eigenen Mitteln nur unter der Bedingung die Erlaubnis, dass dabei den besonderen Zwecken der Katastervermessung kein Eintrag geschehen dürfe. Was das aber sagen will, geht daraus hervor, dass Vorländer nicht allein die Vorarbeiten der auf das Grundsteuer-Kataster bezug habenden Triangulierungen zu bewirken, sondern auch noch die Arbeiten eines Feldmesserpersonales von etwa 100 Mitgliedern zu überwachen und zu prüfen hatte. Im Jahre 1835 war ein Dreiecksnetz 1. und 2. Ordnung über mehr als 100 Quadratmeilen und in zuverlässigem Anschlusse an die hannoverschen und kurhessischen Netze fertig gemessen, berechnet und veröffentlicht, und das Alles durch die Thatkraft, Ausdauer, Geldopfer und Uneigennützigkeit eines einzigen Mannes, dem neben seinen dienstlichen, anstrengenden Geschäften noch dieses Riesenwerk gelang, und dem hiernach die vollste Anerkennung nicht vorenthalten werden darf.*)

Die von Bessel und Baeyer in den Jahren 1831 bis 1836 ausgeführte und 1838 veröffentlichte Gradmessung in Ostpreussen gab die Veranlassung, dass Bessel 10 der besten Gradmessungen zusammenfasste und daraus die wahrscheinlichsten Werte der Constanten für die mathematische Gestalt des Erdsphäroides berechnete. Diese Constanten, grosse und kleine Halbaxe, sind als die zuverlässigsten anerkannt und von der europäischen Gradmessung allgemein eingeführt. Alle späteren trigonometrischen Arbeiten der Landesaufnahme sind auf dem Besselschen Sphäroide berechnet. Auf die Vermessungen zur Aufnahme des Grundsteuer-Katasters hatten die trigonometrischen Landesaufnahmen einen kaum nennenswerthen Einfluss. Die Bussole und die Kette beherrschten noch immer den altpreussischen Feldmesser.

So war in Preussen im allgemeinen der Stand der grossen Triangulationen und der Vermessungen zum Zwecke der Grundsteuerveranlagung bis gegen Ende der sechziger Jahre. Als aber im Jahre 1868 die Vermessungsbeamten in die annektierten Länder einrückten, um auch daselbst die noch nötigen Katastervermessungen auszuführen, standen dieselben vor Berechnungsresultaten der Landesvermessungen, von denen man keinen Gebrauch zu machen verstand. In Hannover hatte man ein bisher in dem Staatsarchive vergrabenes, nur im Manuscripte vorhandenes, ganz eigentümlich hergestelltes Verzeichnis ebener, rechtwinkliger Coordinaten, welche vor dem Gebrauche noch einer Rectificierung bedurften; in Kurhessen gab die Landesvermessung ein Verzeichnis geographischer Positionen. Zur Anleitung für die richtige Verwendung dieses Materials wurde für Hannover das von Professor Wittstein redigierte allgemeine Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844 und, damit verbunden, eine Anweisung zum praktischen Gebrauche der Coordinaten veröffentlicht; für Kurhessen diente zur Instruierung die von dem Verfasser publicierte „Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen, sphärischen Coordinaten der Dreieckspunkte etc.," wovon gegenwärtige Schrift die 2. Auflage bildet.

Da ausser den Endresultaten der kurhessischen und einiger anderen Landesvermessungen auch die der preussischen Landesaufnahme, deren Netze sich allmählich über ganz Preussen und die Reichslande ausdehnen und die noch bestehenden Lücken ausfüllen, in geographischen Längen und Breiten gegeben werden, so erkannte man endlich, welche Schätze von Verwendungsmaterial man bisher unbenutzt hatte liegen lassen, und dieses Erkennen wurde der Beginn einer neuen Ära für die den Königlichen Ministerien der Finanzen, der Landwirtschaft, Domänen und Forsten und der öffentlichen Arbeiten unterstellten Vermessungen.

*) J. J. Vorländer. Geographische Bestimmungen im Kgl. preussischen Regierungsbezirke Minden. Minden 1853.

Im Jahre 1870 wurde ein „Central-Directorium der Vermessungen im preussischen Staate“ ins Leben gerufen, und es werden demselben Vertreter von Staats-Vermessungen aller Ministerien zugewiesen. Diese oberste Vermessungsbehörde hat die Aufgabe, durch Leitung und Entwickelung der im allgemeinen Staatsinteresse zu betreibenden Vermessungen und Kartenarbeiten die Ökonomie und die Ergebnisse derselben zu fördern und dabei der fortschreitenden Wissenschaft, der gesteigerten Technik und den wachsenden Ansprüchen des wirtschaftlichen Bedürfnisses Rechnung zu tragen. Alle im Auftrage oder unter Leitung von Staatsbehörden ausgeführten Specialvermessungen müssen, wenn dieselben im allgemeinen einen Flächenraum von 100 und mehr Hektaren umfassen, an die Detailtriangulationen der Landesaufnahme, oder, wo solche noch nicht vorhanden sind, an gleichwertige Triangulationen angeschlossen, und die Ergebnisse in rechtwinkligen Coordinaten, indem man allmählich von sphäroidischen zu ebenen übergeht, ausgedrückt werden. Da bei einer zu grossen Ausdehnung eines Coordinatensystems die Genauigkeit mit der Entfernung ,von der Abscissenaxe in nicht mehr zulässiger Weise abnimmt, auch zu grosse Coordinaten einen unnötigen Ballast von Ziffern erfordern und dadurch die Übersichtlichkeit erschweren würden, so sind über den ganzen preussischen Staat und die Reichslande in zweckentsprechender Lage 40 Coordinatensysteme verbreitet, und denselben bestimmte Vermessungsgebiete zugewiesen worden.*) Zur Erzielung möglichster Genauigkeit ist den Vermessungen die grösste Sorgfalt unter Benutzung guter Instrumente zu widmen, und die Berechnung mit zweckentsprechender Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auszuführen.

In dem vorstehenden geschichtlichen, übrigens auf Vollständigkeit keinen Anspruch machenden Überblicke über das Vermessungswesen, die Fortschritte in der niederen Geodäsie und deren stetiges Nähertreten an die höhere Geodäsie in Deutschland sollte dargethan werden, dass an den Feldmesser der Neuzeit ganz andere und namentlich wissenschaftliche Anforderungen gestellt werden müssen, als an den „Landschinder“ von ehemals, und dass ein Einblick in das mathematische Gebäude unseres Erdkörpers zur Notwendigkeit geworden ist. Damit jedoch der Leser bei dem Studium des mathematischen Aufbaues des Erdsphäroides die wenigen absolut notwendigen Sätze der Analysis, der sphärischen Trigonometrie und der analytischen Geometrie sofort zur Hand habe, sollen dieselben in leichtfasslicher Weise in einem I. Abschnitte vorausgeschickt werden.

*) Bestimmungen über den Anschluss der Specialvermessungen an die trigonometrische Landesvermessung. Laut Beschluss des Centraldirectoriums der Vermessungen im preussischen Staate vom 29. December 1879.

Erster Abschnitt.

Mathematische Hülfslehren.

A. Sätze aus der Analysis.

§. 1. Der Satz von den unbestimmten Coëfficienten.

1) Ist eine unendliche Reihe

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots,$$

welche für einen gewissen Bereich der Veränderlichen x eine Function $f(x)$ vollständig darstellt, gegeben, so lassen sich immer solche Werte von x finden, dass

$$a > bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

Denn ist m der grösste der Coëfficienten b, c, d . ., so wird, indem man für dieselben durchweg m einführt,

$$a > m\,(x + x^2 + x^3 + \cdots) \text{ d. h. } > m\left(\frac{x}{1-x}\right) > bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

sein, wenn man x so klein nimmt, dass

$$x < \frac{\frac{a}{m}}{1 + \frac{a}{m}} \text{ d. h.} < \frac{a}{a+m}.$$

2) Besteht die Gleichung

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = 0$$

für alle Werte von x, so muss sein

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \text{u. s. w.} \qquad \textbf{1.}$$

Denn stellt man die Reihe in der Form dar

$$a\left\{1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3 + \cdots\right\} = 0,$$

so kann man nach dem vorhergehenden Satze immer solche Werte von x angeben, dass

$$1 > \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3 + \cdots$$

und mithin der Klammerausdruck von Null verschieden wird. Dann muss aber notwendig

$$a = 0$$

sein.

Da $a = 0$, so bleibt die Reihe

$$bx + cx^2 + dx^3 + \cdots = bx \left\{1 + \frac{c}{b} x + \frac{d}{b} x^2 + \cdots\right\} = 0,$$

und durch Wiederholung des vorhergehenden Verfahrens folgt auch

$$b = 0. \quad \text{U. s. w.}$$

3) Hat man für eine Function $f(x)$ zwei Reihenentwickelungen, deren jede für denselben Bereich der Veränderlichen diese Function darstellt, nämlich:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdot\cdot = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdot\cdot,$$

so folgt auch

$$(a - A) + (b - B)\, x + (c - C)\, x^2 + (d - D)\, x^3 + \cdots = 0$$

und hieraus nach 1. **1a.**

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C \quad \text{u. s. w.}$$

Der vorstehend entwickelte Satz ist bekannt als „der Satz von den unbestimmten Coëfficienten“ und einer der wichtigsten der ganzen Analysis.

§. 2. Sätze aus der Differentialrechnung.

1) Ist y eine Function von x, wofür man die allgemeine Bezeichnung

$$y = f(x)$$

anwendet, und ändert sich x in $x + h$, so wird auch y eine entsprechende Änderung Δy erfahren. Die ursprüngliche Gleichung geht über in

$$y + \Delta y = f(x + h).$$

Subtrahiert man hiervon $y = f(x)$ und dividiert beiderseits durch $\Delta x = x + h - x$, so erhält man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Nähert sich bei fortwährendem Kleinerwerden h seiner Grenze $= 0$, so nähert sich der Quotient rechter Hand, nachdem derselbe vor Einführung von $h = 0$ so umgeformt ist, dass man nicht mehr auf den Ausdruck $\frac{0}{0}$ kommt, einem bestimmten Werte $f'(x)$, und wird sodann bezeichnet mit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \tag{2.}$$

wofür man auch setzen kann

$$dy = df(x) = f'(x)\, dx. \tag{2a.}$$

$\frac{dy}{dx}$ ist nur ein Symbol für den bestimmten Wert $f'(x)$ und wird die Ableitung oder der Differentialquotient von $f(x)$, die durch die Formel 2a. angedeutete Operation dagegen die Differentiation oder das Differentiieren der Function $y = f(x)$ genannt.

2) Differentiiert man den obigen Ausdruck

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

noch einmal, so erhält man den zweiten Differentialquotienten von $f(x)$

$$\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx} = f''(x). \quad \text{U. s. w.} \qquad \mathbf{2b.}$$

3) Hat die Function y die Gestalt

$$y = f(x) \pm \varphi(x),$$

so folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (\varphi(x+h) - \varphi(x))}{h}$$

und, $h = 0$ gesetzt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \pm \frac{d\varphi(x)}{dx} = f'(x) \pm \varphi'(x)$$

oder

$$dy = d(f(x) \pm \varphi(x)) = df(x) \pm d\varphi(x) = f'(x)\,dx \pm \varphi'(x)\,dx. \qquad \mathbf{3.}$$

4) Ist ferner

$$y = f(x)\,\varphi(x),$$

so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)\,\varphi(x+h) - f(x)\,\varphi(x)}{h}$$

oder, in den Zähler rechts $+\varphi(x)\,f(x+h) - \varphi(x)\,f(x+h)$ eingeführt,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x) + \varphi(x)f(x+h) - \varphi(x)f(x+h)}{h}$$

$$= \frac{\varphi(x)(f(x+h) - f(x)) + f(x+h)(\varphi(x+h) - \varphi(x))}{h} = \frac{\varphi(x)\Delta f(x) + f(x+h)\Delta\varphi(x)}{\Delta x},$$

und endlich, $h = 0$ gesetzt,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\frac{df(x)}{dx} + f(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi(x)f'(x) + f(x)\varphi'(x)$$

oder auch in folgender Form:

$$dy = d(f(x)\,\varphi(x)) = \varphi(x)\,df(x) + f(x)\,d\varphi(x)$$
$$= (\varphi(x)\,f'(x) + f(x)\,\varphi'(x))\,dx. \qquad \mathbf{4.}$$

5) Ist

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

so folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \frac{f(x)}{\varphi(x)}}{h} = \frac{\varphi(x)\,f(x+h) - f(x)\,\varphi(x+h) + f(x)\,\varphi(x) - f(x)\,\varphi(x)}{h\,\varphi(x)\,\varphi(x+h)}$$

$$= \frac{\varphi(x)\,(f(x+h) - f(x)) - f(x)\,(\varphi(x+h) - \varphi(x))}{h \cdot \varphi(x)\,\varphi(x+h)}$$

$$= \frac{\frac{\varphi(x)\,\Delta f(x)}{h} - \frac{f(x)\,\Delta\varphi(x)}{h}}{\varphi(x)\,\varphi(x+h)}.$$

Für $h = 0$ ergiebt sich hieraus

$$dy = d\,\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(x)\,f'(x) - f(x)\,\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}\,dx. \qquad 5.$$

Für $f(x) = 1$ erhält man (Vergl. 7a.)

$$d\,\frac{1}{\varphi(x)} = -\,\frac{\varphi'(x)}{(\varphi(x))^2}\,dx. \qquad 5a.$$

Für $f(x) = 1$ und $\varphi(x) = x$ wird

$$d\,\frac{1}{x} = -\,\frac{dx}{x^2}. \qquad 5b.$$

6) Ist endlich

$$y = f(\varphi(x)),$$

so setze man

$$\varphi(x) = u$$

und

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = k,$$

also

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + k = u + k.$$

Es ist dann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\varphi(x+h)) - f(\varphi(x))}{h} = \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \frac{f(u+k) - f(u)}{k} \cdot \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Setzt man nun $h = 0$, so wird gleichzeitig auch $k = 0$, und man erhält

$$\frac{df(\varphi(x))}{dx} = f'(u)\,\varphi'(x)$$

oder

$$df(\varphi(x)) = f'(u)\,\varphi'(x)\,dx = f'(u)\,d\varphi(x) = f'(u)\,du. \qquad 6.$$

Die Formeln 3. bis 6. machen es möglich, die Differentiation aller Functionen auf die einer geringen Anzahl zurückzuführen. Von diesen fundamentalen Differentialen sollen die für unsern Zweck erforderlichen in den folgenden Nummern entwickelt werden.

7) Hat man

$$y = ax \text{ oder } y_1 = ax + c,$$

so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h) - ax}{h}; \qquad \frac{\Delta y_1}{\Delta x} = \frac{a(x+h) + c - ax - c}{h};$$

$$dy = d(ax) = adx; \qquad dy_1 = d(ax+c) = adx. \qquad 7.$$

Das constante Glied fällt mithin bei der Differentiation aus, so dass man hat

$$dc = 0. \qquad 7a.$$

8) Ist ferner, wenn n als ganze Zahl gedacht wird, gegeben

$$y = ax^n,$$

so ergiebt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+h)^n - ax^n}{h} = \frac{nax^{n-1}h + ah^2\left(\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}h + \cdots\right)}{h}$$

und für $h = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(ax^n)}{dx} = nax^{n-1}. \qquad 8.$$

Für

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = z, \text{ also für } x^m = z^n,$$

worin m und n ganze Zahlen bedeuten, ist zunächst

$$mx^{m-1}\,dx = nz^{n-1}\,dz,$$

und demnach

$$dy = dz = \frac{mx^{m-1}}{nz^{n-1}}\,dx = \frac{m}{n}\cdot\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}}\,dx = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,dx. \qquad 8\text{a}.$$

Für $m = 1$ und $n = 2$, also für

$$y = \sqrt{x}$$

folgt daher

$$dy = d\sqrt{x} = \tfrac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx. \qquad 8\text{b}.$$

Aus $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ erhält man nach 5a.

$$dy = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}}\,dx = -\,nx^{-n-1}\,dx. \qquad 8\text{c}.$$

Der Satz 8. gilt daher auch für gebrochene und negative Exponenten.

9) Nach bekannten Sätzen der Trigonometrie ist

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tang}\alpha,$$

worin α in Bogenmass für den Radius $= 1$ ausgedrückt ist. Mithin hat man

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1 \text{ d. h. } < \cos 0,$$

ferner

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha} > 1,$$

folglich auch

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha.$$

Es ist demnach $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ dem Cosinus eines Winkels gleich, welcher zwischen 0 und α liegt und gleich $\vartheta\alpha$ gesetzt werden kann, wenn $\vartheta < 1$ genommen wird, also

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \cos\vartheta\alpha,$$

und endlich

$$\left\{\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right\}_{\alpha=0} = \left\{\cos\vartheta\alpha\right\}_{\alpha=0} = 1.$$

Dieses vorausgeschickt, erhält man für $d \sin x$ und $d \cos x$ folgende Entwickelung:

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \cos(x+\tfrac{1}{2}h)\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h},$$

daher

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \cdot \qquad \mathbf{9.}$$

$$\frac{\Delta \cos x}{\Delta x} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \frac{-\sin(x+\frac{1}{2}h)\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = -\sin(x+\tfrac{1}{2}h)\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h},$$

daher

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \qquad \mathbf{10.}$$

10) Da $\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, so erhält man nach 5.

$$d \operatorname{tang} x = d\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x}$$

und durch Substitution der Werte von $d \sin x$ und $d \cos x$ aus 9. und 10.

$$\frac{d \operatorname{tang} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \mathbf{11.}$$

Nach ähnlicher Entwickelung hat man für $\operatorname{cotg} x$

$$\frac{d \operatorname{cotg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \mathbf{12.}$$

11) Mit Hülfe von 9. und 10. und des Satzes von den unbestimmten Coëfficienten 1. und 1a. lassen sich ganz einfach die trigonometrischen Functionen in Reihen nach steigenden Potenzen von x darstellen. Da $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$ ist, so kann die Reihe für $\sin x$ kein constantes Glied und nur Glieder mit ungeraden Potenzen von x, $\cos x$ dagegen als constantes Glied nur 1 und allein Glieder mit geraden Potenzen von x enthalten, und endlich muss für $\sin x$ der Coëfficient des ersten Gliedes $= 1$ sein, da $\left\{\frac{\sin x}{x}\right\}_{x=0} = 1$ ist. Man kann daher ansetzen

$$\text{I.} \quad \sin x = x + ax^3 + b\,x^5 + cx^7 + \cdots$$

$$\text{II.} \quad \cos x = 1 + \alpha x^2 + \beta\,x^4 + \gamma x^6 + \cdots$$

Differentiiert man beide Gleichungen, so wird

$$\text{A.} \quad \frac{d \sin x}{dx} = \quad \cos x = 1 + 3\,ax^2 + 5\,bx^4 + 7\,cx^6 + \cdots$$

$$\text{B.} \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x = \quad 2\,\alpha x + 4\,\beta x^3 + 6\,\gamma x^5 + \cdots$$

Da die beiden Reihen I. und B. für $\sin x$, und ebenso die beiden Reihen II. und A. für $\cos x$ von derselben Form sind und für jeden Wert von x einander gleich sein sollen, so folgt

$$(1 + 2\,\alpha)\,x + (a + 4\,\beta)\,x^3 + (b + 6\,\gamma)\,x^5 + \cdots\cdots = 0,$$

$$(\alpha - 3\,a)\,x^2 + (\beta - 5\,b)\,x^4 + (\gamma - 7\,c)\,x^6 + \cdots\cdots = 0$$

und ferner

$1+2\alpha=0;\ a+4\beta=0;\ b+6\gamma=0\cdots;\ \alpha-3a=0;\ \beta-5b=0;\ \gamma-7c=0\cdots$

Hieraus stellen sich aber folgende bestimmten Werte von $a, b, c \cdots$ und $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ zusammen:

$$\begin{array}{llll}
3a=\alpha; & 2\alpha=-1; & \alpha=-\frac{1}{1\cdot 2}; & a=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\\
5b=\beta; & 4\beta=-a; & \beta=+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}; & b=+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5};\\
7c=\gamma; & 6\gamma=-b; & \gamma=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}; & c=-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7};\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Diese Werte in I. und II. eingeführt geben die gesuchten Reihen, nämlich

$$\left.\begin{array}{l}
\sin x = x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots\\
\cos x = 1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots
\end{array}\right\}\ 13.$$

Diese Gleichungen gelten für jeden endlichen Wert von x, d. h. die beiden Reihen sind beständig convergent.

B. Sätze aus der sphärischen Trigonometrie.

§. 3. Inhalt des sphärischen Dreiecks und sphärischer Excess.

Fig. 1. Ist ABC ein Kugel- oder sphärisches Dreieck, mit Bogen grösster Kreise als Seiten, so bildet sein Flächeninhalt F mit den Flächeninhalten F_1, F_2 und F_3 der drei benachbarten Dreiecke zusammengenommen die Oberfläche der Halbkugel $= 2\varrho^2\pi$, wenn ϱ der Radius der Kugel ist. Nun hat man aber, wenn A, B und C die drei in Gradmass ausgedrückten, sphärischen Winkel des Dreiecks bedeuten,

$$F+F_1=\frac{2\varrho^2\pi}{180}A$$

$$F+F_2=\frac{2\varrho^2\pi}{180}B$$

$$F+F_3=\frac{2\varrho^2\pi}{180}C$$

$$2F+2\varrho^2\pi=\frac{2\varrho^2\pi}{180}(A+B+C),$$

$$F=\frac{\varrho^2\pi}{180}(A+B+C-180^\circ).$$

Hieraus folgt, dass die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks immer grösser als 180° sein muss, da F weder Null noch negativ sein kann. Den Überschuss über 180°, d. h. die Differenz

$$(A+B+C)-180^\circ=\varepsilon$$

nennt man den sphärischen Excess, so dass man hat — in Bogenmass ausgedrückt —

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{F}{\varrho^2} \\ \text{und in Secunden} \quad \varepsilon'' &= \frac{1296000\,F}{2\,\varrho^2\pi} = \frac{F}{\varrho^2 \sin 1''}. \end{aligned}\right\} \quad 14.$$

Für die geodätischen Dreiecke ist ε'' ein sphäroidischer Excess.*)

§. 4. Gleichungen zwischen Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks.

Fig. 2. 1) In dem sphärischen Dreiecke mit den Winkeln A, B, C, den Seiten (Bogen grösster Kreise) a, b, c und den Kugelradien $KA = KB = KC = 1$ (also gleich der Masseinheit) sei

$$BP \perp AKC,\ PA_1 \perp AK,\ PC_1 \perp CK,$$

mithin auch

$$BA_1 \perp KA,\ BC_1 \perp KC,\ \angle\, BA_1P = A,\ \angle\, BC_1P = C.$$

Zieht man noch

$$C_1R \perp KA \text{ und } PQ \perp C_1R, \text{ so ist}$$

$$\angle\, PC_1Q = b \text{ und } PQ = RA_1.$$

Dieses vorausgeschickt, hat man

$$BA_1 = \sin c,\ BC_1 = \sin a,$$

$$BP = BA_1 \sin A = BC_1 \sin C,$$

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C,$$

und vertauscht man c und C mit b und B, so ist auch

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B,$$

und endlich

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}. \quad 15.$$

Ferner ist

$$KA_1 = \cos c \qquad C_1P = BC_1 \cos C = \sin a \cos C$$

$$KC_1 = \cos a \qquad RA_1 = QP = C_1P \sin b$$

$$KR = KC_1 \cos b = \cos a \cos b \qquad RA_1 = \sin a \sin b \cos C$$

$$KA_1 = KR + RA_1 \text{ d. h.}$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \quad 16.$$

Die analogen Formeln für $\cos a$ und $\cos b$ ergeben sich durch Buchstabenvertauschung.

2) Wird $C = 90°$, also $\sin C = 1$, $\cos C = 0$, so gehen für das nunmehr rechtwinklige, sphärische Dreieck ABC, die Gleichungen 15. und 16. unmittelbar über in

$$\left.\begin{aligned} \alpha)\ \sin a &= \sin c \sin A, \\ \beta)\ \sin b &= \sin c \sin B, \end{aligned}\right\} \quad 17.$$

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad 18.$$

---

*) Wegen der Bedeutung der Ausdrücke „sphäroidisches“ und „geodätisches“ Dreieck, „Krümmungsradius“, „Normale“ u. s. w. wird auf weiter hinten verwiesen.

Ferner fällt das Perpendikel BP mit BC_1 zusammen, A_1P und C_1R kommen damit in die Lage A_1C_1, welches als Seite den bei C_1 resp. A_1 rechtwinkligen Dreiecken A_1BC_1 und A_1KC_1 gemein ist und dadurch die folgende Gleichung α) vermittelt, während β) einfach durch Vertauschung der Buchstaben erhalten wird,

$$\left.\begin{array}{l}\alpha)\ \sin c \cos A = \cos a \sin b,\\ \beta)\ \sin c \cos B = \cos b \sin a.\end{array}\right\} \quad 19.$$

Setzt man in 19. für sin b und sin a die Werte aus 17., so hat man

$$\left.\begin{array}{l}\alpha)\ \cos A = \cos a \sin B,\\ \beta)\ \cos B = \cos b \sin A.\end{array}\right\} \quad 20.$$

Führt man in 20. für cos a und sin B und ebenso für cos b und sin A die Werte aus 18. und 17. ein, so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l}\alpha)\ \cos A = \operatorname{tang} b \operatorname{cotg} c = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} c},\\ \beta)\ \cos B = \operatorname{tang} a \operatorname{cotg} c = \dfrac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c}.\end{array}\right\} \quad 21.$$

Durch Multiplication von 17. und 19. und Berücksichtigung von 20. erhält man

$$\begin{array}{l}\alpha)\ \sin a = \operatorname{tang} b \operatorname{cotg} B,\\ \beta)\ \sin b = \operatorname{tang} a \operatorname{cotg} A.\end{array} \quad 22.$$

Multipliciert man endlich die Gleichungen 20. α) und 20. β) mit einander und berücksichtigt 18., so folgt

$$\cos c = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B. \quad 23.$$

§. 5. Das Legendre'sche Theorem.

In jedem messbaren, sphärischen oder sphäroidischen Dreiecke, aber auch noch bei allen grösseren Dreiecken, welche für ein rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinatensystem benutzt werden, sind die Seiten (Bogen) a, b, c gegen den Radius ϱ der Kugel bezw. einer der Dreiecksfläche sich möglichst anschliessenden Kugel, so klein, dass man statt der sin und cos der auf dem Radius ϱ als Masseinheit reducierten Bogenausdrücke $\frac{a}{\varrho} = \alpha$, $\frac{b}{\varrho} = \beta$, $\frac{c}{\varrho} = \gamma$ nur wenige Glieder der betreffenden Sinus- und Cosinusreihen einzuführen braucht, um ausreichend genaue Resultate zu erhalten. Setzt man in 16. statt der sin und cos die Reihen 13. einschliesslich der Glieder der 4. Potenz, so erhält man

$$\left(\alpha - \frac{\alpha^3}{6}\right)\left(\beta - \frac{\beta^3}{6}\right)\cos C = \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^4}{24}\right) - \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24}\right)\left(1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{24}\right)$$

oder, mit Vernachlässigung der Glieder höherer als 4. Ordnung,

$$\alpha\beta\left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{6}\right)\cos C = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2} - \frac{\alpha^4 + \beta^4 - \gamma^4 + 6\,\alpha^2\beta^2}{24}.$$

Führt man hierauf die Division mit $\left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{6}\right)$ aus, indem man im Quotienten

rechts die Glieder der 6. Ordnung und weiter als unerheblich vernachlässigt und die Division mit $\alpha\beta$ nur anzeigt, so ist

$$\cos C = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} - \frac{2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{24\alpha\beta}.$$

Für α, β, γ wieder $\frac{a}{\varrho}$, $\frac{b}{\varrho}$, $\frac{c}{\varrho}$ eingeführt, giebt

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}{24\varrho^2 ab}. \qquad \textbf{24a.}$$

Bezeichnet man in einem ebenen Dreiecke, dessen Seiten a, b, c gleich denen des sphärischen bezw. sphäroidischen Dreiecks sind, die Winkel mit A', B', C', so hat man nach einem analogen Satze der ebenen Trigonometrie

$$\cos C' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \qquad \textbf{24b.}$$

Erhebt man diese Gleichung ins Quadrat, zieht beide Seiten von 1 ab, multipliciert darauf mit $4a^2b^2$ und berücksichtigt, dass $\frac{1}{2} a b \sin C' = F$ gleich dem Inhalt des ebenen, und für den vorliegenden Zweck auch in hinreichender Annäherung des sphärischen bezw. des sphäroidischen Dreiecks ist, so folgt

$$4a^2b^2(1 - \cos^2 C') = 4a^2b^2 \sin^2 C' = 16F^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4. \qquad \textbf{24c.}$$

Wenn man die Gleichungen 24b. und 24c. in 24a. substituiert, so erhält man, mit Anwendung der Gleichung 14. und da $\frac{1}{ab} = \frac{\sin C'}{2F}$ ist,

$$\cos C = \cos C' - \tfrac{2}{3} \frac{F^2}{\varrho^2 ab} = \cos C' - \tfrac{1}{3} \frac{F}{\varrho^2} \sin C' = \cos C' - \tfrac{1}{3} \varepsilon \sin C'.$$

Da $\frac{1}{3}\varepsilon$ ein so kleiner Bogen ist, dass man $\sin \frac{1}{3}\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon$ und $\cos \frac{1}{3}\varepsilon = 1$ setzen kann, so wird $\cos C = \cos C' - \frac{1}{3}\varepsilon \sin C' = \cos(C' + \frac{1}{3}\varepsilon)$ gesetzt werden können; d. h., wenn man den Satz auch auf $A - A'$, $B - B'$ anwendet und man alles in Secunden ausdrückt, so hat man

$$A - A' = B - B' = C - C' = \tfrac{1}{3}\varepsilon''. \qquad \textbf{24.}$$

Hieraus folgt:

Man kann jedes sphärische oder sphäroidische Dreieck bis zu einer gewissen Ausdehnung als ebenes behandeln, wenn man jeden Winkel um $\frac{1}{3}\varepsilon''$ verkleinert.

Dieser für die Geodäsie so wichtige Satz ist als das Legendre'sche Theorem bekannt.

Zur Berechnung des ε kann das sphäroidische Dreieck eben so wie bei obiger Entwickelung als ebenes betrachtet und A für A' u. s. w. gesetzt werden. Man hat alsdann für das rechtwinklige, sphäroidische Dreieck, wenn c die Hypotenuse ist,

$$\varepsilon'' = \frac{ab}{2\varrho^2 \sin 1''} = \frac{c^2 \sin A \cos A}{2\varrho^2 \sin 1''} = \frac{bc \sin A}{2\varrho^2 \sin 1''},$$

für das schiefwinklige, sphäroidische Dreieck

$$\varepsilon'' = \frac{ab \sin C}{2\varrho^2 \sin 1''} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\varrho^2 \sin 1'' \sin A} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{\varrho^2 \sin 1''}, \qquad \textbf{25.}$$

wenn $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist. Für ein sphäroidisches Paralleltrapez, wo a und b die parallelen Seiten und h die Höhe bezeichnen, ist endlich

$$\varepsilon'' = \frac{(a + b)h}{2\varrho^2 \sin 1''}. \qquad \textbf{25a.}$$

Durch eine Erweiterung des Legendreschen Theorems hat Bessel nachgewiesen, dass überhaupt jedes, auch das grösste sphäroidische Dreieck vermittelst Reduction seiner Winkel in ein ebenes Dreieck von den gleichen Seitenlängen umgewandelt und als solches in die Berechnung eingeführt werden kann, wofür später am betreffenden Orte die nötigen Berechnungsformeln gegeben werden sollen.

C. Sätze aus der analytischen Geometrie.

§. 6. Die Coordinatensysteme im allgemeinen.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume bedient man sich in der analytischen Geometrie der Coordinaten. Die Bestimmung der Lage und Gestalt einer beliebigen Linie oder Fläche ist hierdurch insofern zugleich gegeben, als man sich diese aus einer nach vorgeschriebenen, mathematischen Gesetzen geregelten Fortbewegung eines Punktes oder einer Linie entstanden denken kann.

Fig. 3. 1) Betrachten wir zunächst den Fall, dass alle zu untersuchenden geometrischen Gebilde in einer einzigen Ebene liegen. Ist in der Ebene die Lage von zwei sich schneidenden, geraden Linien XX_1, der Abscissen-, und YY_1, der Ordinatenaxe, welche in ihrem Durchschnitte, dem Null-, Anfangs- oder Indifferenzpunkte, einen vorgeschriebenen Winkel, den Coordinatenwinkel, bilden, als bekannt vorausgesetzt, so ist auch die Lage jedes Punktes P, P_1, P_2, P_3 durch die beiden vom Nullpunkte an gemessenen Axenstücke, die Abscissen x, x_1, x_2, x_3 und die Ordinaten y, y_1, y_2, y_3, bestimmt, welche durch zwei von den Punkten $P\cdots$ parallel mit den Axen gezogene Gerade abgeschnitten werden. $x\cdots$ und $y\cdots$ sind die Coordinaten der Punkte $P\cdots$. Vom Nullpunkte aus erhalten die x und die y nach entgegengesetzten Richtungen auch entgegengesetzte Vorzeichen, so dass mit Berücksichtigung dieser letzteren die Lage jedes Punktes vollkommen eindeutig bestimmt ist. Je nachdem der Coordinatenwinkel ein schiefer oder rechter Winkel ist, erhält man ein schief- oder rechtwinkliges Coordinatensystem. Von diesen beiden Arten wird im folgenden nur das rechtwinklige Coordinatensystem behandelt werden.

2) Liegen die zu bestimmenden Punkte allgemein im Raume, so tritt zu den beiden Axen XX_1 und YY_1 noch eine dritte Axe ZZ_1 hinzu, welche die Ebene der beiden ersten im Nullpunkte unter einem vorgeschriebenen Winkel schneidet.

3) Eine zweite Art der Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene geschieht durch das System der Polarcoordinaten. Dieses System hat nur eine Axe oder Anfangsrichtung und in ihr den Nullpunkt oder Pol. Die Lage eines Punktes wird durch seinen geradlinigen Abstand r, r_1, r_2, r_3 vom Nullpunkte, den Leitstrahl oder Radius vector, und durch den Neigungswinkel v, v_1, v_2, v_3 dieser Linie gegen die Axe bestimmt, wobei der Sinn der Drehung von r für wachsende v festgesetzt sein muss. Im folgenden soll v als wachsend angesehen werden, wenn man r in dem Sinne dreht, welcher durch den Übergang von der Richtung der positiven x-Axe zu der positiven y-Axe bestimmt wird.

Fig. 4. 4) Hat man es anstatt der Ebene mit einer Kugeloberfläche zu thun, so lassen sich zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf dieser Fläche zwei Coordinatensysteme aufstellen, welche den beiden für die Ebene besprochenen analog sind und sphärische Coordinaten genannt werden. Die allgemeine Gestaltung des rechtwinklig-sphärischen Systems ist folgende. Man ziehe zwei auf einander senkrecht stehende grösste Kreise als Abscissen- und Ordinatenaxe und betrachte ihren einen Durchschnittspunkt P_0 als Nullpunkt. Wird nun durch den zu bestimmenden Punkt P ein grösster Kreis gelegt, welcher die Abscissenaxe unter einem rechten Winkel im Punkte F

schneidet, so ist der Bogen P_0F die sphärische Abscisse x, der Bogen PF die sphärische Ordinate y des Punktes P. Die Abscissen werden nach entgegengesetzten Richtungen vom Nullpunkte P_0 aus als $+ x$ und $- x$ bis 180° gezählt, wo die Endpunkte der Abscissenaxe zusammentreffen. Alle Ordinaten schneiden sich, hinreichend verlängert, in zwei Punkten, den Polen der Abscissenaxe, welche von dieser nach entgegengesetzten Seiten um 90° abstehen.

5) Für ein sphärisches Polarcoordinatensystem sei folgende Definition gegeben. Dreht man einen grössten Kreis um einen Durchmesser als Drehungsaxe, und wird der eine Endpunkt des Durchmessers als Nullpunkt oder Pol P_0 des Systems angenommen, während die Anfangsrichtung des grössten Kreises auf der Kugel die Axe abgiebt, so wird bei dieser Drehung nach und nach jeder Punkt der Kugeloberfläche von dem grössten Kreise getroffen, und seine Lage durch den sphärischen Abstand vom Pole und durch die Grösse des Drehungswinkels bestimmt. Die verlängerten Abstände (Leitlinien) schneiden sich in dem zweiten, gegen den ersten supplementären Pol. Von diesem aus betrachtet, sind die Abstände die Supplemente der Abstände vom Hauptpole, die Drehungswinkel gegen die des Hauptpoles gleichgross, aber negativ.

Ist das Stück Oberfläche der Kugel, worüber ein Coordinatensystem ausgebreitet ist, so klein, dass dasselbe als eben angesehen werden kann, so gehen die sphärischen in ebene Coordinaten über.

6) Um beide Systeme der sphärischen Coordinaten noch an zwei Beispielen deutlicher zu machen, denke man sich die Erde zunächst als Kugel. Der Äquator als Abscissenaxe und die Meridiane als Ordinaten, von denen einer als Ordinatenaxe anzunehmen ist, geben ein rechtwinkliges, sphärisches Coordinatensystem. Die Abscissen sind die geographischen Längen, die Ordinaten die geographischen Breiten; beide sind unter der Bezeichnung geographische Coordinaten in die Geodäsie eingeführt. Verlegt man den Nullpunkt in einen der Pole, so hat man ein sphärisches Polarcoordinatensystem. Beide Systeme stehen in gegenseitiger Beziehung. Die sphärischen Abstände (Leitlinien) und die Drehungswinkel des Polarcoordinatensystems sind die Complemente der Breiten, bezw. die Längen des rechtwinkligen, sphärischen Coordinatensystems. Die analogen Systeme auf der wahren Erdoberfläche sind im allgemeinen mit denen auf der Sphäre übereinstimmend und erleiden nur durch die abgeplattete Gestalt der letzteren eine Modification.

7) Ausser den angeführten Systemen hat man in der Geodäsie auch noch ebene, rechtwinklige Coordinatensysteme, welche durch Projection der Punkte der Erdoberfläche auf einen die letztere berührenden Cylinder- oder Kegelmantel, und nachherige Abwickelung des Mantels in eine Ebene entstanden sind. Die Gaussischen rechtwinkligen, ebenen Coordinaten für das Königreich Hannover wurden auf einem den Meridian von Göttingen zum senkrechten Querschnitt habenden Cylindermantel dargestellt, die rechtwinkligen, ebenen Coordinaten für das Grossherzogtum Mecklenburg dagegen auf einem die Erdoberfläche in zwei bestimmten Parallelkreisen schneidenden Kegelmantel. In diesen beiden, durch Abwickelung eines die Erdoberfläche umhüllenden Mantels erhaltenen, ebenen, rechtwinkligen Coordinatensystemen ist die gegenseitige Lage der benachbarten Punkte so dargestellt, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich ist. Gauss hat für diese Art der Darstellung die Bezeichnung conforme Abbildung in die Geodäsie eingeführt.

8) In der Kartographie geben die conformen Kartenprojectionen Beispiele in grösster Ausdehnung. Die Mercatorsche Äquatorialprojection wird auf einem den Äquator berührenden Cylindermantel dargestellt, und giebt nach der Abwickelung in rechtwinkligen, ebenen Coordinaten eine conforme Abbildung der ganzen Erde. Diese so projicierten Karten werden vorzugsweise von Seefahrern benutzt, da sich auf denselben die Kurslinie, z. B. Lissabon—Bahia, als gerade Linie darstellt, welche alle Meridiane unter gleichem Winkel durchschneidet, welcher dem Compassstriche entspricht, unter dem das

Schiff zu steuern hat. — Die leider noch zu wenig angewendete Lambertsche Kartenprojection*), welche auf denselben Bedingungen der Conformität wie das mecklenburgische Coordinatensystem beruht, liefert eine Abbildung in ebenen Polarcoordinaten, indem nach der Projection auf einen die Erde in einem bestimmten Parallelkreis berührenden Kegelmantel, dessen Spitze in der verlängerten Erdaxe liegt, der Mantel auf eine Ebene abgewickelt, und der der Kegelspitze entsprechende Punkt als Pol angenommen wird. — Die stereographische Polarprojection giebt auf einer die Erde in einem Pole berührenden Ebene ein conformes Bild der nördlichen oder südlichen Halbkugel in ebenen Polarcoordinaten, deren Pol der Erdpol selbst ist.

§. 7. Der Punkt.

1) In der Ebene.

Fig. 3. Ist der senkrechte Abstand des Punktes P von der Abscissenaxe $= y_1$, von der Ordinatenaxe $= x_1$, so sind

$$x = x_1; \quad y = y_1 \qquad \textbf{26.}$$

die Gleichungen des Punktes P. Ist $x_1 = 0$, so liegt P in der Ordinaten-, ist $y_1 = 0$, in der Abscissenaxe; ist $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$, so fällt P mit dem Nullpunkte zusammen. Liegt P im ersten Quadranten, welcher durch die positiven Richtungen der Axen begrenzt wird, so sind x und y positiv, im zweiten x —, y +, im dritten beide —, im vierten x +, y —.

Macht man ferner den Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems zum Pole und die Richtung der positiven x-Axe zur Axe eines Polarcoordinatensystems, so ist die Lage des Punktes P auch bestimmt durch die Gleichungen

$$r = r_1; \qquad v = v_1. \qquad \textbf{27.}$$

Beide Coordinatensysteme haben nun für jeden Punkt einen Zusammenhang durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lll} x = r \cos v; & y = r \sin v; & \\ \text{oder} & & \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}; & \operatorname{tang} v = \dfrac{y}{x}; & v = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{y}{x}, \end{array}\right\} \textbf{28.}$$

so dass man durch Einsetzung dieser Werte leicht von dem einen zu dem anderen Systeme übergehen kann. Ferner ergiebt sich noch

$$\left.\begin{array}{l} \cos v = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \qquad \sin v = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \text{oder} \\ v = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \operatorname{arc\,sin} \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{array}\right\} \textbf{28a.}$$

2) Auf der Kugeloberfläche.

Fig. 4. Für ein rechtwinklig-sphärisches Coordinatensystem wird die Lage eines Punktes P, den Kugelradius als Masseinheit genommen, ausgedrückt durch die Gleichungen

---

*) Wittstein, Th. Über conforme Karten-Projectionen. (Astronomische Nachrichten. Bd. 71. Jahrg. 1868 No. 1704.)

$$\text{arc } x = \text{arc } x_1; \qquad \text{arc } y = \text{arc } y_1. \qquad 29.$$

Im übrigen gilt auch hier das über den Punkt in der Ebene Gesagte.

Für ein Polarcoordinatensystem ist die Lage des Punktes P bestimmt durch die Gleichungen

$$\text{arc } r = \text{arc } r_1; \qquad v = v_1. \qquad 30.$$

Bei dem Übergang von dem einen auf das andere System, unter Beibehaltung des Nullpunktes als Pol, und der Abscissenaxe in ihrer positiven Richtung als polare Axe, dienen zur Übertragung die folgenden, den Gleichungen 21., 17., 18. und 22. entsprechenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{tang } x = \text{tang } r \cos v; & \sin y = \sin r \sin v; \\ \cos r = \cos x \cos y; & \text{tang } v = \dfrac{\text{tang } y}{\sin x} = \text{tang } y \text{ cosec } x. \end{array}\right\} \quad 31.$$

Oder

$$\left.\begin{array}{ll} x = \text{arc tang}\left(\text{tang } r \cos v\right); & y = \text{arc sin}\left(\sin r \sin v\right); \\ r = \text{arc cos}\left(\cos x \cos y\right); & v = \text{arc tang}\left(\dfrac{\text{tang } y}{\sin x}\right). \end{array}\right\} \quad 31a.$$

Um die Linear-Ausdrücke für x, y und r in Metern zu erhalten, sind dieselben schliesslich mit dem in Metern gegebenen Kugelradius zu multiplicieren.

§. 8. Die gerade Linie.

Fig. 5. 1) Ist AB eine gerade Linie, welche die x-Axe in D, die y-Axe in E schneidet, und setzt man das constante Ordinatenstück $CE = b$, so hat man, wenn $P, P_1, P_2 \cdots$ Punkte der Linie sind,

$$\frac{Pp - b}{Cp} = \frac{P_1p_1 - b}{Cp_1} = \frac{P_2p_2 - b}{Cp_2} = \text{ u. s. w.}$$

Da hiernach diese Quotienten einer Constanten a gleich sind, so wird für irgend einen Punkt der Linie, dessen Coordinaten x und y sein mögen,

$$\frac{y - b}{x} = a, \quad \text{oder} \quad y = ax + b. \qquad 32.$$

Dieser Ausdruck ist die Gleichung der Geraden, worin x, y veränderlich, a, b constant sind. a ist aber die trigonometrische Tangente ($= \text{tang } \tau$) des Winkels τ, welchen die Linie AB im Punkte D mit der Abscissenaxe bildet. Hierbei hat man sich $\angle \tau$ stets so entstanden zu denken, dass die Abscissenaxe, in der positiven Richtung genommen, um D in dem Sinne gedreht ist, dass man nach einer Drehung von 90° in eine der positiven Richtung der y-Axe entsprechende, parallele Richtung kommt. Man hat also

1. Quadrant: $\text{tang } \tau$;

2. Quadrant: $\text{tang } \tau = \text{tang}(90 + \sigma) = -\text{cotg } \sigma$;

3. Quadrant: $\text{tang } \tau = \text{tang}(180 + \sigma) = +\text{tang } \sigma$;

4. Quadrant: $\text{tang } \tau = \text{tang}(270 + \sigma) = -\text{cotg } \sigma$.

Setzt man in der Gleichung 32. $y = 0$, so ist

$$x = -\frac{b}{a} \qquad 32a.$$

die Abscisse des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Abscissenaxe und zugleich die Gleichung einer mit der Ordinatenaxe im Abstande $-\frac{b}{a}$ parallelen Geraden. Setzt man dagegen $x = 0$, so wird

$$y = b \tag{32b.}$$

die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden mit der Ordinatenaxe und zugleich die Gleichung einer mit der Abscissenaxe im Abstande b parallelen Geraden.

Ist in 32. $a = \text{tang } 90° = \infty$, so folgt

$$x = \frac{y-b}{\infty} = 0 \tag{32c.}$$

als Gleichung der Ordinatenaxe. Führt man dagegen $x = -\frac{b}{a}$ ein, so wird

$$y = -a\frac{b}{a} + b = 0 \tag{32d.}$$

die Gleichung der Abscissenaxe.

2) Differentiiert man endlich die Gleichung 32., so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = a = \text{tang } \tau. \tag{33.}$$

Fig. 5. 3) Sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die gegebenen Coordinaten der Punkte P_1, P_2, und ist d ihre Distanz, so sei die Gleichung der durch die beiden Punkte bestimmten Geraden

$$y = ax + b.$$

Dieser Gleichung müssen die Coordinaten von P_1, P_2 genügen, d. h. es muss auch sein

$$y_1 = ax_1 + b \qquad \text{und} \qquad y_2 = ax_2 + b.$$

Durch Elimination erhält man

$$\begin{array}{r} y - y_1 = a\,(x - x_1), \\ y - y_2 = a\,(x - x_2), \\ \hline y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1), \end{array}$$

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tang } \tau,$$

und hieraus als Gleichung der durch P_1, P_2 gelegten Geraden

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \text{tang } \tau \cdot (x - x_1)$$

oder 34.

$$y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) = \text{tang } \tau \cdot (x - x_2),$$

und für die Distanz

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \frac{y_2 - y_1}{\sin \tau} = \frac{x_2 - x_1}{\cos \tau}. \tag{35.}$$

Fig. 5. 4) Ist die Gleichung einer Geraden, welche die Abscissenaxe in D unter dem Winkel τ schneidet, $y = ax + b$, und in derselben ein Punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ gegeben, und wird die Gleichung der Geraden, welche auf der ersteren im Punkte P_1 senk-

recht steht, sowie der Winkel φ, welchen dieses Perpendikel mit der x-Axe im Punkte F bildet und die Länge des Perpendikelstückes vom Punkte P_1 bis zum Durchschnitte F mit der x-Axe — im engeren Sinne die Normale N genannt — gesucht, so erhält man sofort nach 34. als Gleichung des Perpendikels, wenn (ξ, η) ein beliebiger Punkt in demselben ist,

$$\eta - y_1 = a_1 (\xi - x_1) = \text{tang}\, \varphi \cdot (\xi - x_1). \qquad 36.$$

Da beide Geraden auf einander senkrecht stehen sollen, so ist

$$\text{tang}\, \varphi = - \text{cotg}\, \tau = - \frac{1}{\text{tang}\, \tau},$$

und nach 33.

$$a_1 = \text{tang}\, \varphi = - \frac{1}{a}.$$

Daher hat die Gleichung des Perpendikels auch die Form

$$\eta - y_1 = - \frac{1}{a} (\xi - x_1) = - \text{cotg}\, \tau \cdot (\xi - x_1), \qquad 37.$$

und die Länge der Normale P_1F ist

$$N = \frac{1}{\cos \tau} y_1 = \frac{1}{\sin \varphi} y_1, \qquad 38.$$

während die Länge des Perpendikels von P_1 bis zum Durchschnitt G mit der Ordinatenaxe

$$N_c = \frac{1}{\sin \tau} x_1 = - \frac{1}{\cos \varphi} x_1 \qquad 38a.$$

beträgt. Das Stück der Abscissenaxe vom Durchschnittspunkt F des Perpendikels bis zum Fusspunkte p_1 von y_1 nennt man die Subnormale N_s, ihre Länge ist

$$N_s = \text{tang}\, \tau \cdot y_1 = - \frac{1}{\text{tang}\, \varphi} y_1 = - \text{cotg}\, \varphi \cdot y_1. \qquad 38b.$$

Für die Länge T des Stückes der gegebenen Geraden von P_1 bis zum Durchschnittspunkte D mit der Abscissenaxe, und des Stückes der Abscissenaxe selbst von diesem Durchschnittspunkte bis zum Fusspunkte p_1 von y_1, nämlich T_s, hat man aber

$$T = \frac{1}{\sin \tau} y_1 = - \frac{1}{\cos \varphi} y_1, \qquad 38c.$$

und

$$T_s = \text{cotg}\, \tau \cdot y_1 = - \text{tang}\, \varphi \cdot y_1. \qquad 38d.$$

§. 9. Der Kreis.

Fig. 6. 1) Setzt man, auf ein rechtwinkliges, ebenes Coordinatensystem bezogen, die constanten Coordinaten des Kreismittelpunktes $x = \alpha$, $y = \beta$, so ist die Gleichung der mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreislinie, wie sich aus der Figur sofort ergiebt,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta^2) = \varrho^2$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = \varrho^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = c. \qquad \Bigg\} \; 39.$$

Löst man die Gleichung nach x und y auf, so erhält man

$$x = \alpha \pm \sqrt{\varrho^2 - (y - \beta)^2},$$
$$y = \beta \pm \sqrt{\varrho^2 - (x - \alpha)^2},$$

woraus zu ersehen ist, dass jedem x und jedem y zwei Werte von y bezw. x entsprechen.

Liegt der Nullpunkt des Coordinatensystems in der Kreislinie, so ist $\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2$; man erhält für diese Lage als Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta y = 0. \qquad \textbf{39a.}$$

Wählt man einen Durchmesser als Abscissenaxe und seinen einen Endpunkt (also einen Punkt der Peripherie) als Nullpunkt, so wird $\alpha = \varrho$ und $\beta = 0$; die Gleichung nimmt daher folgende Form an

$$(x - \varrho)^2 + y^2 = \varrho^2$$

oder

$$y^2 = 2\,\varrho x - x^2. \qquad \textbf{39b.}$$

Liegt endlich der Nullpunkt des Coordinatensystems im Mittelpunkte des Kreises, so wird $\alpha = 0$, $\beta = 0$, und man erhält für diese Lage die einfachste Form der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = \varrho^2. \qquad \textbf{39c.}$$

Löst man diese Gleichung nach x und y auf, nämlich

$$x = \pm \sqrt{\varrho^2 - y^2},$$
$$y = \pm \sqrt{\varrho^2 - x^2},$$

so erkennt man, dass ausser den bereits erwähnten doppelten Werten jedes Paar $\pm x$ $\pm y$ zwei um den Durchmesser 2ϱ von einander abstehende Punkte bestimmt, und dass im vorliegenden Falle der Kreis durch die beiden Axen in vier symmetrische Teile geteilt wird, er selbst aber eine in sich selbst zurücklaufende Linie ist.

2) Ist $\eta = a\xi + b$ die Gleichung einer ihrer Lage nach gegebenen Geraden, d. h. haben $a = \operatorname{tang} \tau$ und b bestimmte Werte, und wird die Gleichung des Kreises gesucht, welcher mit dieser Geraden einen Punkt (x_1, y_1) gemein hat, so müssen die beiden Gleichungen bestehen

$$y_1 = ax_1 + b,$$
$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \varrho^2.$$

Da in der Kreisgleichung drei Unbekannte α, β und ϱ vorhanden sind, von denen auch nicht eine durch Verbindung beider Gleichungen eliminiert werden kann, zwischen denen aber gleichwohl durch die zweite Gleichung eine bestimmte Beziehung festgesetzt wird, so ist die Aufgabe ganz unbestimmt, d. h. es giebt unendlich viele Kreise mit ebenso vielen, ihrer Grösse und Richtung nach verschiedenen Radien, welche durch den Punkt (x_1, y_1) gehen, wobei ein zweiter Durchschnittspunkt mit der Geraden nicht ausgeschlossen ist.

Um nun die Aufgabe bestimmter zu machen, möge festgesetzt werden, dass die Differentialquotienten $\frac{d\eta}{d\xi}$ und $\frac{dy}{dx}$ für die Gerade und den Kreis in dem gemeinschaftlichen Punkte (x_1, y_1) einander gleich sein sollen.

Differentiiert man beide Gleichungen, so erhält man aus der Gleichung der Geraden

$$\frac{d\eta}{d\xi} = a$$

und aus der Kreisgleichung

$$2(y-\beta)\,dy = -2\,(x-\alpha)\,dx$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}. \qquad \textbf{40a.}$$

Es soll nun für den Durchschnittspunkt (x_1, y_1) sein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi} \qquad \begin{pmatrix} x = x_1; & y = y_1 \\ \xi = x_1; & \eta = y_1 \end{pmatrix}$$

oder

$$a = -\frac{x_1-\alpha}{y_1-\beta}. \qquad \textbf{40b.}$$

Hieraus folgt

$$y_1 - \beta = -\frac{1}{a}\,(x_1-\alpha) = \operatorname{tang}\varphi \cdot (x_1-\alpha).$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung 36., so sieht man, dass der Kreismittelpunkt (α, β) auf der im Punkte (x_1, y_1) zur Geraden $\eta = a\xi + b$ normalen Geraden liegen muss. Ferner folgt sodann nach bekannten Sätzen der Elementargeometrie, dass der Kreis die Gerade im Punkte (x_1, y_1) berührt, und diese letztere demnach Tangente an den Kreis ist. Unter Berücksichtigung von 40b. hat demnach die Gleichung einer Tangente an den Kreis

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

im Punkte (x_1, y_1) nach 34. die Gestalt

$$\eta - y_1 = -\frac{x_1-\alpha}{y_1-\beta}\,(\xi - x_1) = -\operatorname{cotg}\varphi \cdot (\xi - x_1).$$

Da nun (x_1, y_1) jeder beliebige Punkt des Kreises sein kann, so kann man für die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) auch schreiben

$$\eta - y = -\operatorname{cotg}\varphi \cdot (\xi - x).$$

Verbindet man 40a. mit 39, so folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (y-\beta)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2$$

und

$$\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)^2 = \varrho^2,$$

und hieraus

$$x - \alpha = \pm\frac{\varrho\,\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}; \qquad y - \beta = \pm\frac{\varrho}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \qquad \textbf{40.}$$

Aus dem Vorhergehenden weiss man nun, dass für jeden Punkt des Kreises

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\varphi$$

ist, wo φ den Winkel bedeutet, den ϱ mit der Richtung der positiven x-Axe macht. Daher ist

$$x - \alpha = \pm \varrho \cos \varphi; \qquad y - \beta = \pm \varrho \sin \varphi. \qquad \mathbf{41.}$$

Das doppelte Vorzeichen von ϱ ist so aufzufassen, dass in dem einen Falle der Mittelpunkt in der Normalen (zur Tangente) selbst, im anderen Falle in ihrer über den Berührungspunkt hinaus geführten Verlängerung liegt. Da nach den Gleichungen 41. die Grösse von ϱ noch vollkommen willkürlich bleibt, so giebt es unendlich viele Kreise, die eine Gerade in einem bestimmten Punkte berühren. Eine noch nähere Bestimmung des Kreises, vielleicht dadurch, dass man im Berührungspunkt auch die Werte von $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ einander gleich setzt, lässt sich nicht ausführen, weil für die Gerade $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0$ ist. Man sagt daher, ein Kreis kann mit einer Geraden nur eine Berührung erster Ordnung eingehen.

§. 10. Die Ellipse.

Fig. 7. Der geometrische Ort der Punkte P, welche so bestimmt werden, dass für jeden derselben die Summe der Abstände d und d_1 von zwei gegebenen, um $2c$ von einander entfernten Punkten F und F_1, einer gegebenen Grösse $2a$ gleich sein soll, ist eine krumme Linie, welche Ellipse genannt wird. Damit die Curve reell wird, muss $2a > 2c$ sein. Soll die Gleichung dieser Curve bestimmt werden, so mache man die Mitte von $2c$, nämlich C, zum Nullpunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, die Richtung der Strecke FF_1 zur x-Axe und die in C dazu senkrecht stehende Gerade zur y-Axe.

Ist nun P ein beliebiger Punkt der Ellipse, so sind

$$CQ = x \quad \text{und} \quad PQ = y$$

seine Coordinaten, für welche die Gleichungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} (c + x)^2 + y^2 &= d^2, \\ (c - x)^2 + y^2 &= d_1^2. \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{42.}$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen von einander, so folgt

$$(c + x)^2 - (c - x)^2 = 4cx = d^2 - d_1^2 = (d + d_1)(d - d_1).$$

Da

$$2a = d + d_1,$$

so ergiebt sich

$$\frac{2cx}{a} = d - d_1,$$

und hieraus

$$a + \frac{cx}{a} = d,$$

$$a - \frac{cx}{a} = d_1.$$

Substituiert man diese Werte von d und d_1 in eine der beiden Gleichungen 42., und setzt man

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

so erhält man für die Ellipse die Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad 43.$$

Setzt man $y = 0$, so erhält man als Abscisse des Durchschnittspunktes der Curve mit der x-Axe den Wert

$$x = \pm a,$$

und ähnlich für die Ordinate des Durchschnittspunktes mit der y-Axe

$$y = \pm b.$$

Aus der Definition $b^2 = a^2 - c^2$ folgt, dass $a > b$ ist, bei $a = b$ die Ellipse aber in den Kreis übergeht. $2a$ und $2b$ werden die grosse und die kleine Axe, ihre Endpunkte die 4 Scheitel, C der Mittelpunkt und F und F_1 die Brennpunkte der Ellipse genannt.

Löst man die Gleichung 43. nach x und nach y auf, so wird

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass $\pm a$ und $\pm b$ die grösstmöglichen, reellen Werte von x und y sind, dass die Ellipse symmetrisch gegen beide Coordinatenaxen liegt, und dass dieselbe eine in sich zurücklaufende, geschlossene Curve ist.

Verlegt man mit Beibehaltung der x-Axe und ihrer positiven Richtung den Nullpunkt der Coordinaten, welche für diese Lage mit x' und y' bezeichnet werden sollen, in denjenigen Scheitel A_1 der grossen Axe, welcher die Abscisse $-a$ hat, so ist in 43. $x' - a$ für x und y' für y zu setzen, und man erhält

$$y'^2 = \frac{2b^2}{a} x' - \frac{b^2}{a^2} x'^2 = p_1 x' - q_1 x'^2. \qquad 43a.$$

Verlegt man aber den Nullpunkt in den Scheitel B_1 der kleinen Axe, und nimmt man diese als positive x-Axe, so folgt in gleicher Weise

$$y''^2 = \frac{2a^2}{b} x'' - \frac{a^2}{b^2} x''^2 = p_2 x'' - q_2 x''^2. \qquad 43b.$$

Eine Gleichung von der Form

$$y^2 = px - qx^2,$$

wo p und q positive Grössen sind, stellt daher stets eine Ellipse dar; und zwar liegt der Nullpunkt entweder im Scheitel der grossen, oder im Scheitel der kleinen Axe, deren bezügliche Richtungen zugleich die Richtung der positiven x-Axe bestimmen, je nachdem

$$q < 1 \quad \text{oder} \quad q > 1$$

ist. Die Werte der Axen $2a$ und $2b$, ausgedrückt durch p und q, ergeben sich im ersteren Falle zu

$$2a_1 = \frac{p}{q}; \qquad 2b_1 = \frac{p}{\sqrt{q}},$$

und im zweiten Falle zu

$$2a_2 = \frac{p}{\sqrt{q}}; \qquad 2b_2 = \frac{p}{q}.$$

§. 11. Allgemeine Eigenschaften der ebenen Curven.

1) Hat man allgemein eine Gleichung

$$y = f(x),$$

und will man sich von ihr ein geometrisches Bild machen, so kann man x als die Abscisse eines rechtwinkligen Coordinatensystems auffassen. Durch die Gleichung $y = f(x)$ werden sodann ein oder mehrere Werte von y bestimmt, die man sich als Ordinaten von Punkten, welche die Abscisse x haben, denken kann. Durch jeden beliebigen Wert von x und die dazugehörigen Werte von y werden demnach ganz bestimmte Punkte (x, y) definiert. Lässt man nun x continuierlich alle möglichen Werte durchlaufen, so werden die Punkte (x, y) eine oder mehrere bestimmte krumme Linien beschreiben, welche so lange continuierlich sein werden, als $f(x)$ sich continuierlich ändert. Die Gleichung

$$y = f(x)$$

giebt demnach vollständig den Verlauf und die Gestalt der Curve, deren Gleichung $y = f(x)$ ist.

Fig. 8. Soll nun die Tangente an eine Curve

$$y = f(x)$$

im Punkte $P = (x, y)$ bestimmt werden, so lege man zunächst durch P eine Secante, welche die Curve ausserdem noch in dem Punkte Q schneiden möge, welcher die Coordinaten y_1 und $x + h$ habe. Es muss sodann auch sein

$$y_1 = f(x + h).$$

Der Winkel τ_1, welchen die Secante mit der Richtung der positiven x-Axe bildet, ist bestimmt durch die Gleichung

$$\text{tang } \tau_1 = \frac{y_1 - y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Soll die Secante zur Tangente werden, so muss Q immer näher an den Punkt P heranrücken, bis endlich beide zusammenfallen, in welchem Falle $h = 0$ wird. Es wird also nach 2.

$$\text{tang } \tau = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)_{h=0} = f'(x) = \frac{dy}{dx}, \qquad \textbf{44.}$$

wo τ der Winkel ist, welchen die Tangente in dem Punkt (x, y) der Curve $y = f(x)$ mit der x-Axe bildet.

Bezeichnet man nun das Bogenstück PQ mit Δs, so wird Δs, wenn die Secante zur Tangente wird, gleich ds.

Es ist aber nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{1}{\cos \tau_1} = \sqrt{1 + \text{tang}^2 \tau_1},$$

so dass man für den Grenzfall, wo $PQ = ds, PR = h = dx, \tau_1 = \tau$ und $\text{tang } \tau = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ wird, erhält

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

oder $\qquad \textbf{45.}$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\cos\tau = \frac{dx}{ds}, \qquad \sin\tau = \frac{dy}{ds}.$$

Ist φ der Winkel, welchen die zur Tangente PT und damit auch zur Curve normale Gerade PB im Punkte B mit der x-Axe macht, so folgt

$$\operatorname{tang}\tau = -\operatorname{cotg}\varphi = \frac{dy}{dx}. \qquad \mathbf{46.}$$

Sind ξ und η die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente PT, so ist immer

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \operatorname{tang}\tau = \frac{dy}{dx},$$

und deshalb die Gleichung der Tangente

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Ebenso ergiebt sich die Gleichung der Normalen

$$\eta' - y = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(\xi' - x),$$

wo ξ, η und ξ', η' die laufenden Coordinaten für die Tangente, resp. für die Normale sind.

2) Will man die Krümmung einer Curve bestimmen, so muss man eine Einheit haben, mittelst deren man die Krümmung misst. Hat man eine beliebige Curve, so ändert sich im allgemeinen die Krümmung derselben fortwährend; man muss also die Krümmung an jeder Stelle bestimmen. Als Mass zur Bestimmung der Krümmung wählt man nun eine Curve, bei der die Krümmung an allen Stellen dieselbe ist, und eine solche ist offenbar der Kreis. Beim Kreise richtet sich die Krümmung nach der Länge des Radius, und zwar wird mit wachsendem Radius die Krümmung kleiner.

Um nun eine Curvenkrümmung zu untersuchen, bestimmt man zunächst die Kreise, die ein bestimmtes Curvenelement ds berühren. Ihre Mittelpunkte liegen nach dem Früheren, da man ds als ein unendlich kleines Geradenstück auffassen kann, sämmtlich in der Normalen zu ds, resp. zur Curve. Die Krümmung der Curve bestimmt man alsdann nach dem Kreise, welcher sich bei ds am innigsten der Curve anschmiegt; und zwar nimmt man hierbei die Krümmung eines Kreises mit dem Radius 1 als Einheit an, so dass für einen beliebigen Kreis die Krümmung der Länge des Radius umgekehrt proportional ist.

Der Kreis kann als Grenze eines regelmässigen Polygons angesehen werden. Es lassen sich nun unendlich viele Polygone (Kreise) zeichnen, bei denen das Element ds Seite ist, je nachdem man den Polygonwinkel grösser oder kleiner nimmt. Unter allen diesen Kreisen giebt es jedoch nur einen einzigen, der auch das unmittelbar daneben liegende Curvenelement aufnimmt; denn dessen Polygonwinkel ist der Winkel, den diese beiden Nachbarelemente miteinander bilden. Diesen Kreis nennt man den Krümmungskreis und seinen Radius den Krümmungsradius.

Fig. 9. Ist eine Curve $y = f(x)$ gegeben und in einem Punkte $P = (x, y)$ die Tangente PT, so bilde diese mit der x-Axe den Winkel τ, und die unmittelbar folgende Tangente den Winkel τ_1. Bezeichnen wir den unendlich kleinen Winkel, den beide Tangenten miteinander bilden (solange die Curve stetig ist), mit $d\tau$, so ist

$$\tau_1 = \tau + d\tau.$$

Zieht man in den Berührungspunkten die Normalen, so schneiden sich diese im Mittelpunkte M des Krümmungskreises und schliessen hier auch den Winkel $d\tau$ ein. Das Bogenstück ds des Kreises oder der Curve, welches die beiden Radien einschliessen, wird aber gefunden durch die Gleichung

$$\varrho d\tau = ds,$$

wo τ natürlich in Teilen von π gemessen werden muss. Nun ist aber nach 45.

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \frac{dx}{\cos\tau},$$

und ferner nach 11.

$$d \operatorname{tang} \tau = d\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\tau}{\cos^2\tau},$$

also

$$d\tau = \cos^2\tau\, d\,\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\,\frac{dy}{dx} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

und endlich

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}{\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \qquad \mathbf{47.}$$

Denselben Wert von ϱ würde man erhalten haben, wenn man einen Kreis

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = \varrho^2$$

gesucht hätte, welcher die Eigenschaft hat, dass er mit der Curve

$$y = f(x)$$

einen Punkt (x, y) gemein hat, und dass für diesen Punkt

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \text{ und } \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ist. Deshalb sagt man auch, dass der Krümmungskreis mit der betreffenden Curve eine Berührung zweiter Ordnung eingeht.

ϱ als Länge einer Linie kann naturgemäss nur positiv sein. Je nach dem Vorzeichen von $\frac{d^2y}{dx^2}$ ist deshalb das Vorzeichen der Wurzelgrösse im Zähler so zu wählen, dass der Quotient positiv wird. Im übrigen zeigt ein positiver oder negativer Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ an, dass die Curve nach der Abscissenaxe zu convex oder concav ist.

Für eine Gerade wird $\varrho = \infty$, d. h. ihre Krümmung $= \frac{1}{\infty} = 0$; für einen Kreis vom Radius r wird $\varrho = r$, wie es auch sein muss.

Zweiter Abschnitt.

Das Erdsphäroid.

§. 12. Die Figur der Erde.

Die mathematische Figur der Erde ist nach Bessel*) diejenige Fläche, welche die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von Kanälen bilden würde, wobei aber das Meer in relativer Ruhe gegen den Erdkörper, also ohne Strömungen und ohne die Einwirkungen der Anziehungen der Sonne und des Mondes (Ebbe und Flut), und unter constantem, überall gleichem Luftdrucke an der Meeresoberfläche bei Windstille gedacht wird**). Im allgemeinen ist jedoch diese Fläche mit einer Rotationsfläche, welche durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe, die Erdaxe, während die Äquatoraxe die grosse Axe abgiebt, entstanden ist und zum Unterschiede des durch Umdrehung um die grosse Axe erzeugten Rotations-Ellipsoides, ein Sphäroid genannt wird, in so naher Uebereinstimmung, dass für alle praktischen Zwecke ein solches den geodätischen Messungen und Rechnungen ohne jedes Bedenken zu grunde gelegt werden kann.

Alle durch die beiden Endpunkte der kleinen Axe, die Pole, gelegten, ebenen Schnitte, die meridionalen Schnitte, sind daher congruente Ellipsen. Der Äquator, als grösster Kreis, und die übrigen Parallel- oder Breitenkreise, als kleinere Kreise, schneiden die Ebenen aller Meridianellipsen und deren kleine Axe senkrecht.

Ausser den genannten Schnitten ist vorzugsweise noch der in betracht zu ziehen, welcher im ersten Vertikale des Ortes liegt, d. h. senkrecht auf dem Meridiane des Ortes steht und die Normale zur Meridianellipse, die Lothrichtung, enthält. Dieser auf dem Meridiane in dem betreffenden Punkte (Orte) senkrechte Schnitt heisst das Perpendikel auf den Meridian oder der Querschnitt. Überhaupt wird jeder durch einen Punkt P gelegte, ebene Schnitt, welcher die Normale in P enthält, ein Vertikalschnitt genannt.

§. 13. Die Meridianellipse.

Nach der Definition der mathematischen Figur der Erde sind alle ebenen Schnitte des Erdkörpers, welche durch die beiden Pole gelegt werden, also die Erdaxe enthalten und Meridiane genannt werden, congruente Ellipsen. Die Erdaxe giebt die kleine Axe $= 2b$, der

*) Bessel und Baeyer. Gradmessung in Ostpreussen, Berlin 1838. p. 427.

**) H. Bruns. Die Figur der Erde. Publication des Kgl. preuss. geodätischen Instituts. Berlin 1878. In diesem Werke ist streng wissenschaftlich entwickelt, in wieweit man durch astronomisch-geodätische Messungen auf der Erde zur Kenntnis des Verlaufes ihrer mathematischen Oberfläche innerhalb des Messungsgebietes gelangen kann, eine Aufgabe, mit der sich die neuere wissenschaftliche Geodäsie und die Gradmessungen zu befassen haben.

Äquatordurchmesser die grosse Axe $= 2a$ ab, und es besteht nach 43. für die Meridianellipse die Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

wobei die grosse Axe in der x-Axe und ihr Mittelpunkt im Nullpunkt des ebenen, rechtwinkligen Coordinatensystems liegt.

Für geodätische Zwecke führt man in die Ellipsengleichung a als Masseinheit ein, so dass man in den obigen Gleichungen $\frac{a}{a}$ und $\frac{b}{a}$ für a und b zu setzen hat. Schliesslich multipliciert man die aus den Entwickelungen gewonnenen Formeln für Linear-Ausdrücke wieder mit a, um sie in dem Längenmasse ausgedrückt zu erhalten, mit dem a gemessen ist. Hiernach erhält man für $c^2 = a^2 - b^2$ den folgenden Ausdruck als Quadrat der Excentricität e der Meridianellipse

$$\alpha)\ e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

und hieraus

$$\beta)\ \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2,\quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}.$$

Statt der Differenz $a - b$ der beiden Halbaxen hat man $\frac{a-b}{a}$ zu setzen; man nennt diesen Ausdruck die Abplattung p' der Ellipse (Abplattung des Erdsphäroides). Es ist also

$$\gamma)\ p' = \frac{a-b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2}.$$

Endlich möge noch gesetzt werden

$$\delta)\ n' = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}}.$$

Die Gleichung der Meridianellipse selbst erhält aber folgende Gestalt

$$y^2 = (1 - e^2)(1 - x^2). \tag{1.}$$

Fig. 10. Führt man in diese Gleichung für einen beliebigen Punkt $P = (x, y)$ den Winkel $ABP = \varphi$ ein, d. h. den Winkel, welcher durch die Normale PB (zur Tangente PT im Punkte P) mit der grossen Axe gebildet und die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes genannt wird, so ist nach 46. $-\operatorname{cotg}\varphi = \frac{dy}{dx}$; man kann daher x und y auch als Funktionen von φ darstellen.

Wird nämlich die Gleichung (1.) differentiiert, so ergiebt sich sofort

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1-e^2)x}{y} = \frac{-(1-e^2)x}{\sqrt{(1-e^2)(1-x^2)}} = -\operatorname{cotg}\varphi, \tag{2.}$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{(1-e^2)x}{\sqrt{(1-e^2)(1-x^2)}}.$$

Ferner wird

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(1-e^2)^2 x^2}{(1-e^2)(1-x^2)} = \frac{(1-e^2)\,x^2}{1-x^2} = \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}. \tag{2a.}$$

Durch Umformung folgt hieraus

$$x^2 \sin^2\varphi - e^2 x^2 \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - x^2\cos^2\varphi.$$

$$x^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - e^2 \sin^2\varphi) = \cos^2\varphi,$$

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = n = \frac{PK}{\cos\varphi} = PE, \tag{3.}$$

$$x = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = n\cos\varphi = PE\cos\varphi = CD. \tag{4.}$$

Führt man diesen Wert von x in (1.) ein, so erhält man

$$y^2 = (1-e^2)\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right) = \frac{(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{(1-e^2)^2\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

oder, wenn man die Bezeichnung $\frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = m$ einführt,

$$y = \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = (1-e^2)\,n\sin\varphi = m\sin\varphi = PD, \tag{5.}$$

$$\frac{y}{\sin\varphi} = m = PB = \text{Normale (im engeren Sinne) von } P, \tag{6.}$$

$$y\cot\varphi = m\cos\varphi = BD = \text{Subnormale von } P, \tag{7.}$$

$$\frac{y}{\cos\varphi} = m\tan\varphi = PB\tan\varphi = PT = \text{Tangente (im engeren Sinne) von } P, \tag{8.}$$

$$y\tan\varphi = m\tan\varphi\sin\varphi = TD = \text{Subtangente von } P. \tag{9.}$$

Differentiiert man (2.) noch einmal, so wird nach 5., 6. und 8b.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{1-e^2}{\sqrt{(1-e^2)(1-x^2)}} + \frac{(1-e^2)^2x^2}{\sqrt{((1-e^2)(1-x^2))^3}}\right) = -\frac{(1-e^2)^2(1-x^2)+(1-e^2)^2x^2}{\sqrt{((1-e^2)(1-x^2))^3}}$$

$$= -\frac{(1-e^2)^2}{y^3} = -\frac{(1-e^2)^2}{(1-e^2)^3 n^3 \sin^3\varphi} = -\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)\sin^3\varphi}. \tag{10.}$$

Führt man nun die Werte von $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ aus (2a.) und (10.) in 47. ein, so erhält man als Krümmungsradius der Meridianellipse, — welcher jetzt für $a = 1$ mit r bezeichnet werden möge —, für die Breite φ, wenn man in betreff des Vorzeichens und seiner Bedeutung das bereits früher auf Seite 29 Gesagte berücksichtigt,

$$r = \frac{\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1-e^2)\sin^3\varphi}} = \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}(1-e^2)\sin^3\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{1-e^2}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}. \tag{11.}$$

Multipliciert man schliesslich (11.) mit a und setzt $ar = R$, so hat man als Krümmungsradius R des Meridians in der Breite φ, ausgedrückt in dem Masse, mit welchem a gemessen ist,

$$R = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = a(1-e^2)\sec^3\psi. \qquad (12.)$$

Den zweiten Ausdruck für R erhält man, wenn $e\sin\varphi = \sin\psi$ gesetzt wird.

Für den Pol, d. h. für $x = 0$, $y = b$ oder $\varphi = 90°$, ist der Krümmungsradius der Meridianellipse

$$R_P = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{a^2}{b}, \qquad (12a.)$$

für den Äquator aber, d. h. für $x = a$, $y = 0$ oder $\varphi = 0$, ist

$$R_A = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}. \qquad (12b.)$$

In dem vierten Abschnitte „Geodätische Tafeln“ befindet sich in I., Spalte (1). eine Zusammenstellung der Logarithmen von $R \sin 1''$ auf 8 Decimalen von 36° bis 71° der Breite und für Intervalle von 10 Minuten, berechnet mit den Besselschen Fundamentalzahlen, wobei als Masseinheit das Meter angenommen ist. $R\sin 1''$ ist die lineare Länge einer Bogensecunde für den Radius R im Meridiane und in der Breite φ.

Die Gerade CP, welche den Mittelpunkt der Meridianellipse mit dem Punkte $P = (x, y)$ verbindet, heisst der Radius vector oder der geocentrische Radius von P und soll für die grosse Halbaxe $a = 1$ mit ϱ bezeichnet werden und mit ϱ_a, wenn a mit einem bestimmten Längenmasse gemessen ist; der Winkel ACP, welchen PC mit der grossen Axe im Mittelpunkte bildet, heisst die verbesserte oder geocentrische Breite $= \varphi'$.

Da $\operatorname{tang} ACP = \frac{PD}{CD}$ und $\overline{CP}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{PD}^2$ ist, so hat man mit Anwendung von (5.) und (4.)

$$\operatorname{tang}\varphi' = \frac{(1-e^2)\,n\sin\varphi}{n\cos\varphi} = (1-e^2)\operatorname{tang}\varphi, \qquad (13.)$$

$$\varrho_a = a\sqrt{n^2(\cos^2\varphi + (1-e^2)^2\sin^2\varphi)} = a\sqrt{\frac{1-(2-e^2)e^2\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad (14.)$$

Führt man nach §. 13.β) aber $\frac{b^2}{a^2}$ für $(1-e^2)$ ein, und setzt man im Nenner $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ für 1, so wird

$$\left.\begin{aligned} \varrho_a &= a\sqrt{\frac{\cos^2\varphi + (1-e^2)^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + (1-e^2)\sin^2\varphi}} = a\sqrt{\frac{\cos^2\varphi + \frac{b^4}{a^4}\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi}}, \\ \varrho_a &= \sqrt{\frac{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14a.)$$

Eine dritte Form für ϱ_a findet man, wenn noch CW senkrecht zu PE gezogen wird, auf folgendem Wege:

$$CE = PE\cos PEK - KC = n\sin\varphi - (1-e^2)\,n\sin\varphi = ne^2\sin\varphi,$$

$$WE = CE\cos WEC = ne^2\sin^2\varphi,$$

$$PW = PE - WE = n - ne^2 \sin^2 \varphi = n(1 - e^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{n},$$

$$PC \cos CPW = PW = \varrho \cos(\varphi - \varphi') = \frac{1}{n} \text{ oder}$$

$$\alpha) \quad \varrho_a = \frac{a}{n \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Ferner ist

$$PC = \frac{PE \sin PEC}{\sin ECP} \text{ oder}$$

$$\beta) \quad \varrho_a = \frac{an \cos \varphi}{\cos \varphi'}.$$

Multipliciert man α) mit β) und zieht die Wurzel aus, so folgt

$$\varrho_a = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos(\varphi - \varphi')}}. \qquad (14b.)$$

Beschreibt man mit CA um C einen Kreisbogen AN_1, verlängert DP bis zu dessen Peripherie in P_1 und zieht CP_1, so heisst der Winkel $DCP_1 = u$ die reducierte Breite. Diese findet bei den geodätischen Rechnungen Anwendung, während φ' und ϱ_a bei den astronomisch-geodätischen Arbeiten benutzt werden.

Nun ist aber

$$\operatorname{tang} u = \frac{DP_1}{CD} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} = \frac{\sqrt{1 - n^2 \cos^2 \varphi}}{n \cos \varphi} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\frac{\cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - e^2) \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tang} \varphi. \qquad (15.)$$

Durch Verbindung von (13.) und (15.) ergiebt sich weiter

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi' &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tang} u, \\ \operatorname{tang} u &= \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\sqrt{1 - e^2}}. \end{aligned}\right\} (16.)$$

Da es bei Rechnungen vielfach zweckmässiger ist, statt jedesmaliger gegenseitiger Übertragung der Breiten φ, φ' und u, unmittelbar deren Differenzen zum voraus zu berechnen und zum Gebrauche in Tafeln zusammenzustellen, so soll noch die Formelentwickelung für tang $(\varphi - \varphi')$ und tang $(\varphi - u)$ gegeben werden. Es ist

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = \frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \varphi'}{1 + \operatorname{tang} \varphi \operatorname{tang} \varphi'} = \frac{\operatorname{tang} \varphi - (1 - e^2) \operatorname{tang} \varphi}{1 + (1 - e^2) \operatorname{tang}^2 \varphi}$$

$$= \frac{e^2 \operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi - e^2 \operatorname{tang}^2 \varphi} = \frac{\frac{e^2 \sin \varphi}{\cos \varphi}}{\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}$$

$$= \frac{e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{e^2}{2(1 - e^2 \sin^2 \varphi)} \sin 2\varphi. \qquad (17.)$$

Soll tang $(\varphi - \varphi')$ nicht als Function von φ, sondern als Function von φ' dargestellt werden, so hat man nach einer der vorhergehenden ganz analogen Entwickelung als Resultat

$$\operatorname{tang}(\varphi - \varphi') = \frac{e^2}{2(1 - e^2 \cos^2 \varphi')} \sin 2\varphi'. \qquad (17a.)$$

Für tang $(\varphi - u)$ gestaltet sich der Gang folgendermassen:

$$\operatorname{tang}(\varphi - u) = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang} u}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang} u} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \sqrt{1-e^2}\operatorname{tang}\varphi}{1 + \sqrt{1-e^2}\operatorname{tang}^2\varphi}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{1-e^2})\operatorname{tang}\varphi}{1+\sqrt{1-e^2}\operatorname{tang}^2\varphi} = \frac{\dfrac{(1-\sqrt{1-e^2})\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\dfrac{\cos^2\varphi + \sqrt{1-e^2}\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{1-e^2})\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi + \sqrt{1-e^2}\sin^2\varphi} = \frac{(1-\sqrt{1-e^2})\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi + \sqrt{1-e^2}(1-\cos 2\varphi)}$$

$$= \frac{(1-\sqrt{1-e^2})\sin 2\varphi}{(1+\sqrt{1-e^2}) + (1-\sqrt{1-e^2})\cos 2\varphi} = \frac{n'\sin 2\varphi}{1+n'\cos 2\varphi}. \quad (18.)$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\operatorname{tang}(\varphi - u) = \frac{n'\sin 2u}{1 - n'\cos 2u}. \quad (18a.)$$

§. 14. Der ebene Schnitt durch das Erdsphäroid.

Fig. 11. Jedem ebenen Schnitte, welchen man durch das Sphäroid legt, entspricht im allgemeinen ein einziger auf dieser Ebene senkrecht stehender Meridianschnitt. Auf dem Äquator und den übrigen Parallelkreisen stehen dagegen alle Meridianschnitte senkrecht, da die Erdaxe die Ebenen dieser Kreise senkrecht durchschneidet. Fällt man von irgend einem Punkte der Erdaxe auf irgend eine Schnittebene ein Perpendikel, so ist die Meridianebene, in welcher dieses Perpendikel liegt, senkrecht auf dem Schnitte. — Dieses vorausgeschickt, sei PMQ ein durch den Punkt M gehender, beliebiger ebener Schnitt, NMS der Meridian des Punktes M, CH der Durchschnitt seiner Ebene mit der Äquatorebene, und MR senkrecht auf CH, alsdann sind $CR = x_1$, $MR = y_1$ die Coordinaten des Punktes M, bezogen auf die grosse Halbaxe CH des Meridians NMS als positive Abscissenaxe und dessen Mittelpunkt C als Nullpunkt. Ferner sei NPS die auf der Schnittebene PMQ senkrechte Meridianebene, PQ der Durchschnitt beider, CA der Durchschnitt der Meridian- und Äquatorebene, $CD = x$, $PD = y$ die Coordinaten des Punktes P des senkrechten Meridianschnittes, bezogen auf seine Axen. Die Durchschnittslinien PQ und CA bilden den Winkel $AB_1P = \chi$, welcher zugleich der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die Äquatorebene ist, während die Normale PE des Punktes P mit AC den Winkel $ABP = \varphi$ einschliesst, welcher die Polhöhe von P ist. Nimmt man nun P als Nullpunkt, PQ als Abscissenaxe und MO senkrecht auf derselben an, so ist $PO = \xi$ die Abscisse, $MO = \eta$ die Ordinate des Punktes M für ein rechtwinkliges Coordinatensystem in der Ebene des Schnittes PMQ. Setzt man endlich die Abstände des Punktes P von den Durchschnittspunkten der ξ-Axe PQ und der Normale PE mit der x- und y-Axe, nämlich $PB_1 = \mu$, $PE_1 = \nu$, $PB = m$, $PE = n$ und berücksichtigt, dass $MR = OV$, $MO = RV$, $MU = RC$ und $UO = CV$ ist, so werden die folgenden Gleichungen für y_1 und x_1^2, sowie für die Dreiecke PBD und PB_1D und die Dreiecke PKE und PKE_1 bestehen:

α) $y_1 = (\mu - \xi)\sin\chi$,

β) $x_1^2 = (\nu - \xi)^2\cos^2\chi + \eta^2$,

γ) $\mu\sin\chi = m\sin\varphi = y$,

δ) $\nu\cos\chi = n\cos\varphi = x$.

Ferner ist nach (3.) und (5.)

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$m = (1 - e^2)\, n.$$

Statt der für den Punkt M geltenden Gleichung $y_1{}^2 = (1 - e^2)(1 - x_1{}^2)$ erhält man nunmehr die folgende

$$(\mu - \xi)^2 \sin^2 \chi = (1 - e^2)\,(1 - (\nu - \xi)^2 \cos^2 \chi - \eta^2).$$

Löst man die Klammern auf, ordnet nach Potenzen von ξ und dividiert durch $(1 - e^2)$, so hat man

$$\eta^2 = \frac{1 - e^2 - \nu^2 \cos^2 \chi + e^2 \nu^2 \cos^2 \chi - \mu^2 \sin^2 \chi}{1 - e^2}$$

$$+ 2 \left(\frac{\mu \sin^2 \chi}{1 - e^2} + \nu \cos^2 \chi \right) \xi - \frac{1 - e^2 \cos^2 \chi}{1 - e^2}\, \xi^2.$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung in dem Zähler des ersten Gliedes nach δ) $\nu^2 \cos^2 \chi = x^2$, nach γ) $\mu^2 \sin^2 \chi = y^2$, in dem zweiten Gliede nach γ) und (5.) $\frac{\mu \sin^2 \chi}{1 - e^2} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \sin \chi$, nach δ) und (3.) $\nu \cos^2 \chi = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cos \chi$ und berücksichtigt, dass $\sin \varphi \sin \chi + \cos \varphi \cos \chi = \cos (\chi - \varphi)$ ist, so erhält man zunächst für den Zähler des ersten Gliedes

$$1 - e^2 - x^2 - e^2 x^2 - y^2 = (1 - e^2)(1 - x^2) - y^2 = 0$$

nach (1.). Mithin fällt das 1. Glied rechts aus, und es bleibt schliesslich als Gleichung des ebenen Schnittes durch das Erdsphäroid

$$\eta^2 = \frac{2 \cos (\chi - \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}\, \xi - \frac{1 - e^2 \cos^2 \chi}{1 - e^2}\, \xi^2 = p\xi - q\xi^2. \tag{19.}$$

Jeder ebene Schnitt durch das Sphäroid ist daher, da $q > 1$ ist, p und q aber positiv sind, nach 43b. eine Ellipse, deren Gleichung (19.) auf die kleine Axe als Abscissenaxe und den in der Peripherie der senkrechten Meridianebene liegenden Scheitelpunkt P der kleinen Axe als Nullpunkt bezogen ist. Bezeichnet man unter der Voraussetzung, dass die grosse Halbaxe a der Meridianellipse gleich 1 ist, die kleine Halbaxe des Schnittes mit β, die grosse Halbaxe mit α und die Excentricität mit ε, so wird

$$q = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon^2},$$

also

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \chi}, \tag{19a.}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2 \sin^2 \chi}{1 - e^2 \cos^2 \chi}, \tag{19b.}$$

$$p = \frac{2\alpha^2}{\beta} = 2\beta \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2\beta \frac{1 - e^2 \cos^2 \chi}{1 - e^2} = \frac{2 \cos (\chi - \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{19c.}$$

und hieraus

$$\beta = \frac{\cos(\chi - \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \chi}, \qquad (19d.)$$

$$\alpha = \frac{\cos(\chi - \varphi)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \chi}}. \qquad (19e.)$$

Für jeden ebenen, der Erdaxe parallelen Schnitt wird

$$\chi = 90^\circ,\ \cos \chi = 0,\ q = \frac{1}{1 - e^2} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Das Verhältnis der beiden Axen dieser der Erdaxe parallelen Schnitte ist mithin dem Axenverhältnisse der Meridianellipse gleich, d. h. alle diese Schnitte sind unter sich und der Meridianellipse ähnlich. Denkt man sich die Ebene einer Meridianellipse in Parallelbewegung, so dass ihr Mittelpunkt C in dem auf ihrer Ebene senkrecht stehenden Äquatorradius CA' oder CA'_1 von C bis A' oder A'_1 fortschreitet, so werden die hierdurch repräsentierten Parallelschnitte in steter Abnahme in den Orten A' und A'_1 als Punkte ihr Ende finden. Bezeichnet man nun den Bogen des Äquators zwischen der Meridianellipse und der hierzu durch einen Punkt P' gelegten parallelen Schnittellipse, d. h. den sphärischen Abstand beider Ellipsen, mit λ, so ist die Länge der grossen Halbaxe a_1 des Parallelschnitts

$$a_1 = a \cos \lambda, \qquad (20.)$$

die Länge der kleinen Halbaxe b_1 aber

$$b_1 = a_1 \sqrt{1 - e^2} = a \sqrt{1 - e^2} \cos \lambda. \qquad (20a.)$$

Legt man durch einen Punkt P' der Parallelellipse einen ebenen Schnitt, welcher senkrecht zur Ebene dieser Ellipse steht und deren Normale im Punkte P' enthält, so wird dieser Schnitt die parallele Meridianellipse ebenfalls senkrecht in einem Punkte F schneiden, und, wegen der Ähnlichkeit und gleichartigen Lage beider Ellipsen, auch die Normale von F enthalten, welche ebenso wie der ganze Schnitt mit der Äquatorebene den Winkel f — die Breite von F — bilden möge. In F ist dieser Schnitt also Querschnitt. Der Krümmungsradius für den Punkt F in der Breite f der Meridianellipse ist nach (12.)

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 f)^3}},$$

der Krümmungsradius im Punkt P' für den Parallelschnitt aber

$$R_1 = \frac{a(1 - e^2) \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 f)^3}}. \qquad (21.)$$

Dreht man einen der Erdaxe parallelen Schnitt um seine grosse Axe, so wird, wenn in (19.) χ von 90° bis 180° wächst, also $\cos^2 \chi$ von 0 bis 1 zunimmt, q von $\frac{1}{1 - e^2}$ bis 1 abnehmen. In dieser letzten Lage ist daher das Axenverhältnis $= 1$, d. h. beide Axen sind einander gleich, mithin $e = 0$, und der elliptische Schnitt ist in einen Kreis (Äquator) übergegangen. Setzt man die Drehung weiter fort, so wird in jedem folgenden Quadranten die Änderung der Axenverhältnisse jedesmal in einer der vorhergehenden entgegengesetzten Aufeinanderfolge sich wiederholen.

Da die Veränderlichkeit von q nur von dem Winkel χ abhängt, so wird auch allgemein zwischen allen unter sich parallelen Schnitten ein constantes Axenverhältnis stattfinden. Mithin müssen auch alle dem Äquator parallelen Schnitte Kreise sein.

Über die ebenen Schnitte des Erdsphäroids ist hiermit alles nötige gesagt.

§. 15. Der ebene Schnitt im ersten Vertikale des Ortes und der Parallelkreis in derselben Breite.

Fig. 11. Dreht man den im vorhergehenden Paragraphen ausführlich behandelten ebenen Schnitt PMQ so um den Scheitel P seiner kleinen Axe, dass die senkrechte Stellung dieser Ebene gegen die durch P gelegte Meridianebene unverändert bleibt, so wird, wenn PE_1 und PE zusammenfallen, der Winkel χ in die Polhöhe φ übergehen; es wird also in (19.) sein

$$\chi - \varphi = \varphi - \varphi = 0,$$
$$\cos(\chi - \varphi) = \cos(\varphi - \varphi) = 1,$$
$$\cos^2 \chi = \cos^2 \varphi.$$

Die Gleichung (19.) geht daher in die folgende über

$$\eta^2 = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}\, \xi - \frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}\, \xi^2, \tag{22.}$$

welche die Gleichung des ebenen Schnittes im ersten Vertikale des Ortes P ist. Dieser Schnitt wird auch der Querschnitt von P genannt.

Setzt man in (22.) die grosse Halbaxe $= \alpha_1$, die kleine Halbaxe $= \beta_1$, die Excentricität $= \varepsilon_1$, so ist nach 43b. und den Gleichungen (19a.) bis (19e.), indem man in denselben φ für χ einführt, stets unter der Voraussetzung, dass die grosse Halbaxe der Meridianellipse gleich 1 ist, nunmehr

$$q = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} = \frac{1}{1 - \varepsilon_1^2} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2}, \tag{22a.}$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}, \tag{22b.}$$

$$p = \frac{2\alpha_1^2}{\beta_1} = 2\beta_1 \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2} = 2\beta_1 \frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{22c.}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}, \tag{22d.}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \cdot \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}}. \tag{22e.}$$

Für den Punkt P des Querschnittes in der Breite φ ergiebt sich der Krümmungsradius, auch Krümmungsradius des Perpendikels oder Querkrümmungshalbmesser für P genannt, durch Analogie einfach aus (12a.) zu $\frac{\alpha_1^2}{\beta_1}$, und ferner nach (22c.) zu

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{23.}$$

wenn die grosse Halbaxe der Meridianellipse gleich 1 gesetzt wird. Multipliciert man daher schliesslich mit a; d. h. setzt man $N = an$, so ist

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \tag{24.}$$

der Krümmungsradius des Schnittes im ersten Vertikal in der Breite φ.

In dem vierten Abschnitte „Geodätische Tafeln" sind in I., Spalte (2), für das Meter als Einheit, und berechnet mit den Besselschen Fundamentalzahlen, die Logarithmen von N sin 1″ auf 8 Decimalen und in Intervallen von 10 Minuten von 36° bis 71° der Breite zusammengestellt. N sin 1″ ist die Länge einer Bogensecunde im ersten Vertikal.

Dreht man den ebenen Schnitt PMQ noch weiter um P bis PE_1 parallel AC, d. h. $\chi = 0$ wird, so geht PE_1 in PK über und die Gleichung (19.) erhält nun die Form

$$\eta^2 = 2 \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \xi - \xi^2.$$

Der Schnitt ist daher in dieser Lage nach 39b. ein Kreis, und zwar der Parallelkreis in der Breite φ; sein Radius p, $a = 1$ vorausgesetzt, ist aber

$$p = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = n \cos \varphi.$$

Ausgedrückt in dem Längenmasse, mit welchem die grosse Halbaxe a gemessen wird, und $P = ap$ gesetzt, erhält man für den Radius des Parallelkreises

$$P = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = N \cos \varphi. \tag{25.}$$

Dasselbe Resultat ergiebt sich aus dem rechtwinkligen Dreiecke PEK, worin $PK = PE \sin PEK$ ist.

Eine Zusammenstellung der Logarithmen von $N \sin 1'' \cos \varphi$ (d. h. der Länge einer Bogensecunde im Parallel) für die verschiedenen Breiten ist im vierten Abschnitte unterblieben, da die Änderungen von log N und log cos φ bei wachsender Breite in entgegengesetztem Sinne auftreten und dadurch bei Interpolierung die Hinzuziehung der 2. Differenzen nötig machen. Kürzer erhält man log N sin 1″ cos φ für diesen Fall durch Entnahme von log N sin 1″ aus Tafel I., (2), und durch Addition von log cos φ.

§. 16. Der Krümmungsradius des Vertikalschnittes in der Breite φ und dem Azimute A.

Fig. 12. Bezeichnet E_1GMZ die Lotlinie des Punktes M auf dem Sphäroide, so muss dieselbe in der Ebene des durch M gehenden Meridians NMH liegen, da die erzeugende Curve des Rotationskörpers ein diesem congruenter Meridian ist. Mit dem Äquatorradius CH wird $ZMGE_1$ einen Winkel HGM bilden, welcher die geographische Breite φ des Punktes M ist. Legt man nun durch M einen Schnitt FGM, welcher die Lotlinie MG in sich aufnimmt und gegen den Meridian NMH um den Winkel $NMF = A$, das Azimut von MF, Anfangsrichtung Nord und über Ost gezählt, geneigt ist, so werden die Meridian-, die Schnitt-, und die Äquatorebene im Punkte G eine dreikantige Ecke bilden, der ein sphärisches Dreieck entspricht, für welches der Kürze halber und nur zur Veranschaulichung das sphäroidische Dreieck FHM gelten mag.

Dreht man nun die Meridianebene NMH um ihre Axe NC, bis dieselbe, in der Lage NPX angekommen, die kleine Axe des Schnittes in der Richtung von PB_1 enthält, so wird die Meridianebene NPX auf der Schnittebene $FMPB_1$, und die Durch-

schnittslinie FGB_1 der Äquator- und Schnittebene auf PB_1 und XB_1 senkrecht stehen, daher auch Winkel $XB_1P = HFM = \chi$ der Neigungswinkel der Äquatorebene gegen die Schnittebene sein.

Legt man durch M einen Schnitt im ersten Vertikal, so wird derselbe auch MG enthalten, da diese Linie in der Richtung seiner kleinen Axe liegt. Zieht man nun durch M an diesen Schnitt und an den Meridian Tangenten, so bestimmen dieselben eine Ebene, welche wegen der überall convexen Oberfläche des Sphäroides nur den Punkt M mit diesem gemein hat, und demnach eine Tangentialebene ist. Es schneidet daher auch jeder andere ebene Schnitt, welcher MG enthält, aus dieser Tangentialebene eine Gerade aus, welche nur den Punkt M mit dem entsprechenden Schnitte durch das Sphäroid gemein hat und demnach eine Tangente an denselben ist. Da endlich diese Tangente nach der Construction der Tangentialebene senkrecht zu MG steht, so ist MG Normale in M zu dem Schnitte PMF, und der Winkel $FGM = \omega$ der Neigungswinkel der Normale gegen die grosse Axe des Schnittes.

In dem bei H rechtwinkligen, sphärischen Dreieck FHM ist nunmehr $MH = \varphi$, $MF = \omega$, $FMH = 180° - A$, $HFM = \chi$; zwischen diesen vier Stücken bestehen nach 17. und 20. die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin\chi\,\sin\omega,\\ \cos\chi &= \cos\varphi\,\sin A. \end{aligned}\right\}\quad(26.)$$

Bezeichnet man die beiden Halbaxen des Vertikalschnittes $PMFB_1$ mit α und β und die Excentricität mit ε, so ist für den Punkt M nach (12.), a als Einheit vorausgesetzt, der Krümmungsradius r_A durch den Ausdruck gegeben

$$r_A = \frac{\alpha\,(1-\varepsilon^2)}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin^2\omega)^3}},$$

oder in drei Faktoren zerlegt, (27.)

$$r_A = (1-\varepsilon^2)\cdot\frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\omega}}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2\sin^2\omega}.$$

Nach (19a.) hat man aber

$$1-\varepsilon^2 = \frac{1-e^2}{1-e^2\cos^2\chi},$$

und analog (3.) die Länge der Normale n_1 des Schnittes PMF von M bis zu ihrem Durchschnittspunkte E_1 mit seiner kleinen Axe, welcher zugleich in der Rotationsaxe des Sphäroides liegt,

$$n_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\omega}}$$

zu setzen. MGE_1 gehört aber auch als Normale dem Meridiane NMH für den Punkt M in der Breite φ an, so dass ist

$$\frac{\alpha}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\omega}} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Substituiert man nach (19b.) für ε^2 in $\frac{1}{1-\varepsilon^2\sin^2\omega}$ den Ausdruck

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2\sin^2\chi}{1-e^2\cos^2\chi},$$

so geht (27.) in die folgende Gleichung über

$$r_A = (1-e^2)\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{1}{1-e^2\cos^2\chi}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{e^2\sin^2\chi\sin^2\omega}{1-e^2\cos^2\chi}}$$

$$= (1-e^2)\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,(1-e^2\cos^2\chi-e^2\sin^2\chi\sin^2\omega)}.$$

Setzt man endlich nach (26.)

$$\cos^2\chi = \cos^2\varphi\sin^2 A;\quad \sin^2\chi\sin^2\omega = \sin^2\varphi \text{ und } ar_A = R_A,$$

so erhält man schliesslich, nur in bekannten Grössen ausgedrückt, als den Krümmungsradius des Vertikalschnittes in der Breite φ und unter dem Azimute A, mit demselben Längenmasse wie die grosse Halbaxe a gemessen,

$$R_A = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,(1-e^2\cos^2\varphi\sin^2 A-e^2\sin^2\varphi)},$$

$$R_A = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\cdot\frac{1-e^2}{(1-e^2+e^2\cos^2\varphi\cos^2 A)}. \tag{28.}$$

Mit Einführung von (12.), (24.) und $\frac{(24.)}{(12.)}$ nämlich

$$R,\ N \text{ und } \frac{N}{R} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2}$$

kann man den Wert für R_A in folgender Weise umformen:

$$R_A = N\,\frac{1}{1+\dfrac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}\cos^2 A} = N\,\frac{1}{\sin^2 A+\cos^2 A+\dfrac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2}\cos^2 A}$$

$$= N\,\frac{1}{\sin^2 A+\dfrac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2}\cos^2 A} = N\,\frac{1}{\sin^2 A+\dfrac{N}{R}\cos^2 A},$$

und endlich

$$R_A = \frac{NR}{R\sin^2 A+N\cos^2 A}. \tag{29.}$$

Wenn man den reciproken Wert der Gleichung (29.) bildet, werden die gegenseitigen Beziehungen der drei Krümmungsradien in der einfachsten Form dargestellt, nämlich

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{N}\sin^2 A+\frac{1}{R}\cos^2 A. \tag{30.}$$

Für $A = \begin{cases}0^\circ\\180^\circ\end{cases}$ wird $\sin^2 A = 0$, $\cos^2 A = 1$, daher

$$\frac{1}{R'_A} = \frac{1}{R},$$

für $A = \begin{cases}90^\circ\\270^\circ\end{cases}$ dagegen wird $\sin^2 A = 1$, $\cos^2 A = 0$, mithin

$$\frac{1}{R''_A} = \frac{1}{N},$$

wie es auch sein muss.

R_A ist hiernach der allgemeine Ausdruck des Krümmungsradius für einen Punkt P in einer Curve auf der Erdoberfläche, und in beschränkter Längenausdehnung auch für ein Stück der Curve, deren Verlauf sich einem Vertikalschnitte in P anschmiegt. Da aber sowohl das Azimut, als auch die Krümmung einer solchen Curve sich für jeden anderen Punkt in ihr ändert, so wird man angenähert den Krümmungsradius eines Curvenstückes am besten aus dem Azimute und der Breite der Mitte des Stückes ableiten. Der mit diesem Krümmungsradius zwischen den Normalen der Curvenendpunkte construierte Kreisbogen giebt alsdann das Längen- und Gradmass der Curve.

§. 17. Die mittleren Krümmungsradien.

1) Legt man durch einen Punkt P der Erdoberfläche in der Breite φ zwei zu einander senkrechte Vertikalschnitte PT' und PT'', und hat PT' das Azimut A, so wird der für den Punkt P in (30.) definierte reciproke Wert des Krümmungsradius für die Richtung PT' die Form haben

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{N} \sin^2 A + \frac{1}{R} \cos^2 A,$$

für die Richtung PT'' aber

$$\frac{1}{R_{A+90^\circ}} = \frac{1}{N} \cos^2 A + \frac{1}{R} \sin^2 A,$$

daher ist das arithmetische Mittel aus beiden Werten

$$\frac{1}{R'_A} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{N}\right), \tag{31.}$$

und hieraus

$$R'_A = \frac{2RN}{R+N}. \tag{32.}$$

Dreht man nun die Vertikalschnittverbindung $T'PT''$ um die Normale von P als Axe, so wird bei einer vollen Umdrehung das Mittel aus je zwei Werten der $\frac{1}{R_A}$ für jede Lage von $T'PT''$ die obige Form annehmen, und daher werden auch (31.) und (32.) Durchschnittswerte für $\frac{1}{R_A}$ und R_A sein, welche nicht nur für den Punkt P, sondern auch für die ihn zunächst umgebende Fläche Anwendung finden können.

Dasselbe Resultat (31.) und (32.) würde man erhalten, wenn man bei einer vollen Umdrehung eines einzigen Vertikalschnittes die Quadrate der sin und cos der Azimute in dem 2., 3. und 4. Quadranten durch die Azimute A des ersten Quadranten ausdrückte.

2) Macht man mit dem Krümmungsradius R des Punktes P um das Centrum seines Kreises in der Richtung des Meridians eine Winkelbewegung dv, so ist das beschriebene Bogenelement $ds = Rdv$. Setzt man hierauf Rdv durch die gleich grosse Winkelbewegung dv des Krümmungsradius N um das Centrum seines Kreises in der Richtung des ersten Vertikals in Parallelbewegung, so wird das Bogenelement Rdv ein Flächenelement

$$dF = Rdv \cdot Ndv = (\sqrt{RN} \cdot dv)^2 \tag{33.}$$

beschreiben. dF auf der sphäroidischen Oberfläche im Punkte P ist daher einer durch

die gleichgrossen, rechtwinklig zu einander ausgeführten Winkelbewegungen eines Kugelradius $\sqrt{RN}$ auf der Kugel construierten Fläche gleich, d. h. der Krümmungsradius für die Fläche F im Punkte P ist gleich dem geometrischen Mittel aus den Krümmungsradien im Meridian und Perpendikel dieses Punktes, d. h.

$$R_F = \sqrt{RN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \qquad (34.)$$

Der reciproke Wert des Quadrates dieses Krümmungsradius, aber bezogen auf die grosse Halbaxe der Meridianellipse als Einheit, also

$$\frac{1}{r^2_F} = \frac{1}{rn} = \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}{1-e^2} \qquad (35.)$$

findet in den geodätischen Rechnungen unter der Bezeichnung „Gaussisches Krümmungsmass" sehr häufige Anwendung.

Eine Zusammenstellung aller $\log \frac{1}{rn}$ in Intervallen von 10 Minuten von 36° bis 71° der Breite erhält man im vierten Abschnitte aus Tafel I., (3), wenn man zu den daselbst aufgeführten Logarithmen den unter der Spalte und dem Striche stehenden constanten Logarithmus addiert.

Ausser den vorgenannten beiden mittleren Krümmungsradien R'_A und R_F mögen noch diejenigen hier aufgeführt werden, für welche das Erdsphäroid als Kugel aufgefasst wird, ohne dass jedoch auf die Ableitung der Formeln eingegangen werden soll.

a) Der Radius einer Kugel, welche mit dem Erdsphäroide gleiche Oberfläche hat, ist

$$R_1 = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{17}{360}e^4 - \frac{67}{3024}e^6 - \cdots\right). \qquad (36.)$$

b) Für den Radius der Kugel, welche mit dem Erdsphäroide gleichen kubischen Inhalt hat, besteht der Ausdruck

$$R_2 = \sqrt[3]{a^2 b} = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{5}{72}e^4 - \frac{55}{1296}e^6 - \cdots\right). \qquad (37.)$$

R_2 ist hiernach das geometrische Mittel aus den drei Halbaxen des Erdsphäroides a, a und b.

c) Der Radius als arithmetisches Mittel aus den drei Halbaxen des Sphäroides wird durch folgende Gleichung bestimmt:

$$R_3 = \frac{2a+b}{3} = a\left(1 - \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{24}e^4 - \frac{1}{48}e^6 - \cdots\right). \qquad (38.)$$

Die Identität der beiden ersten Glieder $1-\frac{1}{6}e^2$ und der geringe Unterschied in den 3. Gliedern bewirken eine solche Uebereinstimmung in $\log R_1$, $\log R_2$ und $\log R_3$, dass erst in der 7. Decimale eine mittlere Differenz von 2 Einheiten zu Tage tritt. Man kann also sagen, dass im allgemeinen die mit diesen Radien construierten Kugeln mit dem Erdsphäroide gleichen Inhalt und gleiche Oberfläche haben. Auch lassen sich diese Radien zur Entwerfung von Kartennetzen, besonders bei starker Verjüngung, mit hinlänglicher Genauigkeit, aber Vereinfachung der Berechnung, mit Vorteil verwenden.

„Die mathematischen Theorien der höheren Geodäsie" von F. R. Helmert, Leipzig 1880, welchem Werke die 3 Angaben für R_1, R_2 und R_3 entnommen sind, enthalten pag. 63 bis 68 nicht allein die Begründungen derselben, sondern auch noch verschiedene andere mittlere Krümmungsradien.

§. 18. Die geodätische Linie.

Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten P und P_1 auf der Erdoberfläche heisst zum Unterschiede von allen anderen Verbindungslinien auf derselben, z. B. einem Vertikalschnitte, die geodätische Linie. So lange das Curvenstück PP_1 einem sphäroidischen Flächenstücke angehört, welches mit einer sphärischen Fläche vom Radius R' vertauscht werden kann, wird auch die Linie PP_1 mit dem Bogen eines grössten Kreises vom Radius R' zusammenfallen. Dass aber der Bogen des grössten Kreises die kürzeste Linie zwischen P und P_1 ist, ergiebt sich einfach aus folgender Betrachtung.

Jeder zwischen den Punkten P und P_1 mit einem Radius $> R'$ construierte Kreisbogen wird, wo immer sein Mittelpunkt angenommen wird, unter der Oberfläche liegen; es bleibt daher zur Vergleichung verschiedener zwischen P und P_1 liegender Bogen ausser R' nur noch ein Radius $r' < R'$ übrig. Nennt man nun S den mit R' und S_1 den mit r' construierten Bogen, so ist, da beide Bogen die gemeinschaftliche Sehne PP_1 haben,

$$R' \sin \tfrac{1}{2} S = r' \sin \tfrac{1}{2} S_1.$$

Da aber $R' > r'$ ist, so muss sein

$$\sin \tfrac{1}{2} S < \sin \tfrac{1}{2} S_1, \text{ d. h. } S < S_1.$$

Die Einführung nur eines Krümmungsradius ist anwendbar für die 3 Seiten jedes messbaren Dreiecks auf dem Sphäroide, und auch noch im allgemeinen mit hinlänglicher Genauigkeit für jede geodätische Linie innerhalb eines jeden der 40, vom Centraldirektorium der Vermessungen im preussischen Staate *) eingeführten Coordinatensysteme. (Wegen Erzielung noch grösserer Genauigkeit bei der Berechnung der zuletzt genannten Linien sehe man betreffenden Orts im dritten Abschnitte nach.)

Die Normalen von zwei Punkten P und P_1 auf dem Sphäroide liegen im allgemeinen nicht in einer Ebene. Die Durchschnittslinien der Erdoberfläche und der Vertikalschnitte, welche in jedem der beiden Punkte durch den anderen gelegt sind, fallen daher nicht zusammen. Die geodätische Linie s aber windet sich zwischen den beiden Vertikalschnitten hin, und zwar so, dass die Normalen aller Punkte von s eine zwischen den Normalen von P und P_1 liegende windschiefe Fläche bilden. Ausnahmen von dieser Lage der geodätischen Linie sind folgende:

1) Zwischen je zwei Punkten desselben Meridians oder des Äquators fallen Vertikalschnitte und geodätische Linie mit dem Meridian — bezw. Äquatorbogen zusammen.

2) Die Normalen je zweier Punkte desselben Parallels schneiden sich in einem Punkte der Rotationsaxe, ihre Vertikalschnitte fallen daher zusammen. Die geodätische Linie zwischen diesen beiden Punkten liegt ausserhalb des gemeinsamen Vertikalschnittes nach der Seite des näheren Poles zu.

Die geodätischen Linien **) sind nach der oben gegebenen Definition Curven doppelter Krümmung, welche bei grösserer Längenausdehnung nicht mehr durch ebene Schnitte, bezw. elliptische oder Kreisbogen ersetzt werden können und deshalb einer besonderen Behandlung bedürfen. Diese Auseinandersetzung würde aber weit über das gesteckte Ziel unserer gegenwärtigen Betrachtungen hinausreichen. Es sollen jedoch als Anhalt weiterer Studien im folgenden kurz die Endergebnisse mitgeteilt werden.

---

*) Siehe Einleitung. Seite 6.

**) Ausführliches über die geodätische Linie findet man in: Baeyer. Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862; Andræ. Den danske Gradmaaling. Kjøbenhavn 1867 bis 1884; Helmert. Die mathematischen Theorien der höheren Geodäsie. Leipzig 1880.

Ist s die lineare Länge der geodätischen Linie PP_1, α ihr Azimut in P, α_1 ihr Azimut in P_1, und a_0 die grosse Halbaxe der Meridianellipse; ist ferner s' die lineare Länge der Durchschnittslinie, welche durch den im Punkte P vertikalen ebenen Schnitt zwischen P und P_1 erhalten wird, φ die geographische, u die reducierte Breite von P, α' das Azimut des in P vertikalen Schnittes PP_1, v der Winkel in P zwischen den in P und P_1 vertikalen Schnitten PP_1 bezw. P_1P, und haben endlich s'_1, φ_1, u_1, α'_1 und v_1 dieselbe Bedeutung für den Punkt P_1, so bestehen folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} s' &= s\left(1 + \frac{e^4}{360}\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \cos^4\varphi \sin^2 2\alpha\right), \\ s'_1 &= s\left(1 + \frac{e^4}{360}\left(\frac{s}{a_0}\right)^4 \cos^4\varphi_1 \sin^2 2\alpha_1\right); \end{aligned}\right\} \quad (39.)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha &= \frac{e^2}{12\sin 1''}\left(\frac{s}{a_0}\right)^2 \sec^2\chi \cos^2 u \sin 2\alpha - \frac{e^2}{48\sin 1''}\left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \sin 2u \sin\alpha, \\ \alpha'_1 - \alpha_1 &= \frac{e^2}{12\sin 1''}\left(\frac{s}{a_0}\right)^2 \sec^2\chi \cos^2 u_1 \sin 2\alpha_1 - \frac{e^2}{48\sin 1''}\left(\frac{s}{a_0}\right)^3 \sin 2u_1 \sin\alpha_1. \end{aligned}\right\} \quad (40.)$$

In diesen Gleichungen (40.) ist $\sec\chi$ aus $\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{s}{a_0} = \operatorname{tang}\chi$ zu berechnen, $\alpha' - \alpha$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ sind in Secunden ausgedrückt; auch können auf den rechten Seiten von (39.) und (40.) α mit α', α_1 mit α'_1, u mit φ und u_1 mit φ_1 vertauscht werden.

Für eine nicht zu lange geodätische Linie ist

$$\alpha' - \alpha = \tfrac{1}{3} v; \qquad \alpha'_1 - \alpha_1 = \tfrac{1}{3} v_1. \qquad (41.)$$

Die Länge der grössten geodätischen Linie innerhalb Europas weicht von s', bezw. s'_1 im Maximum erst um $0^m\!.4$ ab. Ebenso erreichen die Differenzen $\alpha' - \alpha$ und $\alpha'_1 - \alpha_1$ bei $s = 64000^m$ höchstens einen Wert von $0''\!.01$, und für die längste Linie innerhalb Europas höchstens einen Wert von $60''$.*)

Der §. 18. behandelt die geodätische Linie, solange sie nicht aufhört, kürzeste Linie zu sein.

§. 19. Das geodätische Dreieck.

Verbindet man drei, nicht in einer geodätischen Linie liegende Punkte auf dem Sphäroide durch drei geodätische Linien zu einem Dreiecke, so ist dasselbe ein sphäroidisches oder geodätisches Dreieck. Ein aus Winkelmessungen hervorgegangenes, ein sog. messbares Dreieck, kann aber stets als ein sphärisches behandelt werden, indem man sich dasselbe auf eine Kugelfläche übertragen denkt, welche zum Radius den Krümmungsradius $\sqrt{(RN)}$ des Schwerpunktes des Dreiecks hat, d. h. eines Punktes, dessen Breite dem arithmetischen Mittel aus den Breiten der drei Eckpunkte gleich ist. Die gemessenen Winkel des Dreiecks sind die Neigungswinkel der beiden Ebenen, deren Lage durch die Lotlinie des Beobachtungsortes und die beiden anderen Dreieckspunkte bestimmt wird. Man erhält hierdurch zwar in Wirklichkeit sechs ebene Vertikalschnitte, von denen man aber, entsprechend einem Kugeldreiecke, annehmen darf, dass je zwei in eine Ebene zusammenfallen, und die so übrig bleibenden drei Vertikalschnitte nicht allein in ihren Durchschnitten mit der Erdoberfläche die

*) Siehe die zweite Note auf voriger Seite.

Dreiecksseiten als Bogen grösster Kreise darstellen, sondern auch sich selbst im Kugelmittelpunkte schneiden, und daselbst eine körperliche Ecke bilden.

Die Annahme nur eines Krümmungsradius für die Fläche eines sphäroidischen, als gleichwertig mit der eines sphärischen Dreieckes kann aber noch weiter als nur für messbare Dreiecke ausgedehnt werden, so unter anderen für jedes abgeleitete Dreieck innerhalb eines der 40 eingeführten rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensysteme im preussischen Staate, wobei nur noch erwähnt werden soll, dass für ein rechtwinkliges, sphäroidisches Dreieck, in welchem die Katheten die Abscisse und Ordinate eines Coordinatenpunktes abgeben, der Krümmungsradius $\sqrt{(RN)}$ für die Berechnung des sphärischen Excesses, R für die Kathete im Meridiane, N für die Kathete im ersten Vertikale benutzt werden.

Für alle diese eben besprochenen Dreiecke sind zur Berechnung des sphärischen Excesses ε die unter 25. aufgeführten Formeln in der Weise vollständig genügend, dass man statt ϱ^2 das Quadrat des Krümmungsradius für den Schwerpunkt des Dreiecks nämlich (RN) nach (34.) einsetzt, und innerhalb der gesteckten Grenzen den Inhalt des ebenen Dreiecks als identisch mit dem Inhalte F des sphäroidischen Dreiecks beibehält. Als Argument für (RN) dient $(\varphi) = \frac{1}{3}(\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C)$ d. h. eine Breite, welche dem arithmetischen Mittel aus den Breiten der drei Eckpunkte A, B und C des Dreiecks entspricht. Hiernach hat man für ε'' die Formel

$$\varepsilon'' = \frac{F}{(RN) \sin 1''}, \tag{42.}$$

oder specialisiert für das rechtwinklige, sphäroidische Dreieck, wenn a und b die beiden Katheten und c die Hypotenuse ist,

$$\varepsilon'' = \frac{ab}{2(RN)\sin 1''} = \frac{bc \sin A}{2(RN)\sin 1''} = \frac{c^2 \sin A \cos A}{2(RN)\sin 1''}.$$

Für das schiefwinklige, sphäroidische Dreieck ist dagegen (43.)

$$\varepsilon'' = \frac{ab \sin C}{2(RN)\sin 1''} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2(RN)\sin 1'' \sin A} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(RN)\sin 1''},$$

worin $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ gesetzt ist.

Jedem Winkel wird also $-\frac{1}{3}\varepsilon''$ hinzugefügt, hiernach das Dreieck als ebenes berechnet, und schliesslich werden die sphäroidischen Winkel wieder hergestellt.

Bei Abnahme des Flächeninhaltes des Dreiecks wird der sphärische Excess immer kleiner, und darf bei einer mittleren Seitenlänge von 2000^{m} gleich Null ($\varepsilon'' < 0''\!.01$) gesetzt, das Dreieck aber als ebenes behandelt werden.

Für Dreiecke von grösserer Ausdehnung, welche nicht mehr aus unmittelbaren Beobachtungen der Winkel hervorgehen, sondern erst aus gemessenen Dreiecken oder aus astronomisch-geodätischen Beobachtungen, oder aus beiden abgeleitet werden, wobei also die Seiten nicht mehr als Bogen grösster Kreise behandelt werden können, und überhaupt der sphäroidische Charakter entschieden zum Ausdrucke kommt, genügen die bisherigen Berechnungsformeln nicht mehr. Eine Erweiterung des Legendreschen Theoremes durch Bessel, wodurch jedes geodätische Dreieck in ein ebenes und umgekehrt übertragen werden kann, hier eingehend zu behandeln, würde nicht am Platze sein. Es soll jedoch durch Aufführung ziemlich weitgreifender Näherungsformeln die Möglichkeit gegeben werden, bis zu einer gewissen Ausdehnung auch solche Aufgaben der höheren Geodäsie zu lösen.

Es seien a, b, c die Seiten (lineare Längen), A, B, C die Winkel des sphäroidischen, A', B', C' die Winkel des ebenen Dreiecks, welches dieselben Seiten wie das sphäroidische hat. Führt man nun die grosse Halbaxe a_0 der Meridianellipse als Einheit ein, d. h. setzt man $\frac{a}{a_0} = a_1$,

$\frac{b}{a_0} = b_1$, $\frac{c}{a_0} = c_1$, $\frac{1}{3}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = m^2$, den Flächeninhalt des sphäroidischen Dreiecks $\frac{F}{a_0^2} = F_1$; sind ferner α, β, γ nach (35.) die Gaussischen Krümmungsmasse der drei Eckpunkte des Dreiecks, und ist μ ihr arithmetisches Mittel, so hat man als sphäroidischen Excess

$$\varepsilon'' = \frac{F_1}{\sin 1''}\,\mu. \qquad (44.)$$

Nun ist aber, wenn $\frac{F'}{a_0^2} = F'_1$ der Inhalt des entsprechenden ebenen Dreiecks ist,

$$F_1 = F'_1\,(1 + \tfrac{1}{8}\,\mu\, m^2);$$

daher der sphäroidische Excess mit Benutzung der Fläche des ebenen Dreiecks, welche durch eine mit 6-stelligen Logarithmen ausgeführte Berechnung bestimmt wird,

$$\varepsilon'' = \frac{F'_1}{\sin 1''}\,\mu\,(1 + \tfrac{1}{8}\,\mu\, m^2). \qquad (45.)$$

Die Verteilung des sphäroidischen Excesses auf die drei Winkel geschieht alsdann nach den folgenden Formeln

$$\left.\begin{aligned} A - A' &= \frac{1}{3}\,\varepsilon'' + \frac{1}{12}\,\varepsilon''\left(\frac{\alpha}{\mu} - 1\right) + \frac{1}{60}\,\varepsilon''\,\mu\,(m^2 - a_1^2),\\ B - B' &= \frac{1}{3}\,\varepsilon'' + \frac{1}{12}\,\varepsilon''\left(\frac{\beta}{\mu} - 1\right) + \frac{1}{60}\,\varepsilon''\,\mu\,(m^2 - b_1^2),\\ C - C' &= \frac{1}{3}\,\varepsilon'' + \frac{1}{12}\,\varepsilon''\left(\frac{\gamma}{\mu} - 1\right) + \frac{1}{60}\,\varepsilon''\,\mu\,(m^2 - c_1^2). \end{aligned}\right\} \qquad (46.)$$

Nach Anbringung der durch (46.) bestimmten Reductionen an die sphäroidischen Winkel wird das Dreieck als ebenes berechnet. Sollten sich jedoch für die Winkel A', B', C' des ebenen Dreiecks solche Werte ergeben, dass dieselben eine Änderung des zuerst nach (45.) berechneten ε'' hervorbringen, so ist die Berechnung von (45.) und (46.) mit den zuletzt gefundenen Werten zu wiederholen.

Die Zahlenwerte für $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$ erhält man aus der Tafel I., Spalte (3), des vierten Abschnittes mit den Argumenten φ_A, φ_B, φ_C und durch Addition des unter der Spalte (3) stehenden constanten Logarithmus $= c$, nämlich

$$\log\alpha = \log\frac{1}{2\,(RN)_{\varphi_A}\sin 1''} + c \text{ etc.}$$

Ferner ist

$$\log\mu = \log\tfrac{1}{3}\,(\alpha + \beta + \gamma).$$

Man darf jedoch mit hinlänglicher Genauigkeit bis zu ziemlich grossen Dreiecken $\log\mu$ in gleicher Weise wie $\log\alpha$ etc. mit Argument $\frac{1}{3}(\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C)$ aus Tafel I., Spalte (3.), und durch Addition von c berechnen.

Die Zahlenangaben in den Tafeln I. und II. haben die Besselschen Elemente zur Grundlage, wie dieselben in dem folgenden Paragraphen aufgeführt sind.

§. 20. Die Dimensionen des Erdsphäroides.

Zur Bestimmung der Grösse und der mathematischen Figur der Erde sind zu verschiedenen Zeiten Gradmessungen ausgeführt, und aus diesen die Fundamentalzahlen, die Elemente des Erdsphäroides, abgeleitet worden. Diese Elemente sind die

grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b, die Abplattung $\frac{a-b}{a}$, und der Meridianquadrant Q, wobei jedoch zu bemerken ist, dass nur zwei von diesen Grössen erforderlich und die beiden andern Functionen derselben sind.

Da durch jede neu hinzutretende Gradmessung die Elemente eine Änderung erlitten, so wurden auch den im Laufe der Zeit ausgeführten, grösseren trigonometrischen Aufnahmen verschiedene Elemente zu grunde gelegt. Es würde jedoch zu weit führen, alle Gradmessungen und die aus denselben abgeleiteten Elemente aufzuführen. Wir wollen uns daher nur auf die Bestimmungen beschränken, welche für die Triangulationen in Deutschland von Anfang dieses Jahrhunderts bis in die Neuzeit eine Bedeutung haben.

Im Jahre 1798 gab eine zu dem Zwecke eingesetzte Commission als Ergebnis der französischen Gradmessung mit Hinzuziehung der peruanischen Gradmessung

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{334}; \; Q = 5130740 \text{ Toisen.}$$

Der zehnmillionste Teil von Q wurde 1799 als die französische, gesetzliche Masseinheit erklärt und Meter genannt, indem nach Anbringung einer geringen Abrundung

$$1^{m} = 443^{l}.296 = 0^{T}.513074074074\ldots$$

festgesetzt wurde.

Im Jahre 1810 berechnete Delambre nach einer von ihm vorgenommenen Revision und Ergänzung

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{308.64}; \; Q = 5131111^{T}.4.$$

Diesen Angaben wurden 1832 durch Puissant*) beigefügt und bis in die neuesten Zeiten in Frankreich als offizielle betrachtet

$$a = 6376986^{m}; \; b = 6356323^{m}; \; Q = 10000724^{m}.$$

Der zehnmillionste Teil von Q als Definition des Meters passte daher nicht mehr. Die erste Feststellung wurde jedoch beibehalten, und ist jetzt dieses Meter in fast allen Culturländern die gesetzliche Masseinheit geworden.

Baden benutzte die von Puissant gegebenen Zahlen bei seinen früheren Vermessungen.

Bayern nahm für seine Vermessungen ursprünglich an

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{306}; \; b = 2177685.5 \text{ bayer. Ruten}; \; Q = 10000000^{m}.$$

Im Grossherzogtum Hessen wurde zu grunde gelegt**)

*) Im Jahre 1819 nahm Puissant eine Nachrechnung der Delambreschen Angaben aus dem Jahre 1810 vor, wobei sich ergab, dass Delambre bei der Berechnung der Abplattung einen Fehler begangen hatte. Puissant fand $\frac{1}{309.67}$ statt $\frac{1}{308.64}$, während der Wert von Q ungeändert blieb. Da jedoch die Zahl $\frac{1}{308.64}$ bei den französischen Vermessungen bereits eingeführt war, so wurde sie als definitive beibehalten. Die aus den Delambreschen Elementen 1832 von Puissant abgeleiteten und in Metern angegebenen Werte von a, b und Q beruhen auf der Annahme, dass

$$1^{m} = 443^{l}.295936 = 0^{T}.513074$$

ist, welches genau der zehnmillionste Teil der zuerst aufgeführten Bestimmung von Q ist. Dadurch, dass bis in die neuesten Zeiten beide Annahmen für das Meter nebeneinander benutzt wurden, ist schon mancherlei Verwirrung entstanden.

**) Nach einer Mitteilung von Prof. Dr. Nell in Darmstadt mit dem Hinweis auf E. Schmidts dritte Berechnung in Astr. Nachr. Bd. IX, Nr. 213.

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{302.02};\ b = 3260940^{T}.03.$$

In Hannover und Kurhessen wurden die aus sechs Gradmessungen von Walbeck berechneten Elemente benutzt. Dieselben sind

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{302.78};\ Q = 5130878^{T}.22 = 10000267^{m}.95.$$

Preussen nahm bei den früheren trigonometrischen Aufnahmen des Generalstabes nach v. Müfflings Instruction die folgenden Elemente an

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{310};\ a = 1693183.15 \text{ preuss. Ruten.}$$

Bei der Triangulation in Rheinland und Westfalen gebrauchte Vorländer die aus sieben Gradmessungen von Schmidt berechneten Elemente, und zwar wie dieselben aus der zweiten Berechnung hervorgingen, nämlich

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{297.479};\ a = 3271852^{T}.318.$$

Im Königreiche Sachsen ist bei den Militairaufnahmen Ende des vorigen Jahrhunderts der sphäroidischen Gestalt der Erde gar nicht gedacht worden. Das Netz ist vielmehr anfänglich als eben, und erst später bei der Erweiterung desselben als auf einer Kugel liegend, deren Radius jedoch vom Verfasser nicht ermittelt werden konnte, betrachtet worden.

Württemberg gebrauchte nach Angaben von Bohnenberger

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{312.7};\ a = 3271670^{T}.7;\ b = 3261208^{T}.3$$

als Grundzahlen bei seinen Vermessungen.

Die Besselschen Elemente des Erdsphäroides.

Nach Beendigung der Gradmessung in Ostpreussen berechnete Bessel im Jahre 1841 aus den zehn zuverlässigsten Gradmessungen in den verschiedensten Gegenden der Erde

$$\log a^{T} = 6.5148235.337;\ \log b^{T} = 6.5133693.539.$$

Hieraus leitete Encke im „Astronomischen Jahrbuche für 1852" die folgenden Grössen ab:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{1}{299.152818};\ a = 3272077^{T}.1399;\ b = 3261139^{T}.3284;$$

$$Q = 5131179^{T}.81134 = 10000855^{m}.765.$$

Diese Elemente werden als diejenigen angesehen, welche sich nach den bisherigen Erfahrungen dem Erdsphäroide am besten anpassen; sie kommen aus diesem Grunde immer mehr in allgemeinen Gebrauch.

Das Königl. preussische geodätische Institut und die anderen Commissionen der europäischen Gradmessung, sowie die Königl. preussische Landesaufnahme benutzen nur diese Elemente.

Mit den Besselschen Elementen sind auch die bayerische und badensche Landesvermessung später teilweise berechnet und so 1873 publiciert. Ferner gründen sich die Landesvermessungen von Mecklenburg und Nassau auf die Angaben von Bessel; die Neuvermessungen von Sachsen und Württemberg haben diese Elemente ebenfalls als Grundlage.

Bei der grossen Wichtigkeit, welche die Besselschen Elemente und die aus ihnen abgeleiteten Constanten haben, ist besonders darauf zu achten, dass für die letzteren nur solche Wege der Berechnung eingeschlagen werden, welche die grösste Sicherheit für die Richtigkeit der Resultate geben. Bessel gab nur die zehnstelligen Logarithmen der in Toisen ausgedrückten Halbaxen a und b. Encke berechnete den $\log e$ in der Weise, dass er $\frac{b}{a} = \cos \psi$ setzte und daraus $\log e = \log \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $= \log \sin \psi$ ableitete. Bei der Kleinheit des Winkels ψ ist zu befürchten, dass bei dem Übergange von $\log \cos \psi$ zu $\log \sin \psi$ eine nicht zulässige Unsicherheit in den letzten Stellen des $\log e$ zu tage tritt, auf welche schon Professor H. Bruns (Leipzig) aufmerksam machte. Die Königl. preussische Landesaufnahme nahm eine Neuberechnung auf einem anderen Wege vor und fand den $\log e$ um 44 Einheiten in der 10. Decimale grösser, als ihn Encke in dem „Astronomischen Jahrbuche von 1852" angiebt.

Die im folgenden ausgeführte Nachrechnung wird die Richtigkeit der Angabe der Landesaufnahme bestätigen.

$$\text{Gegeben:}\quad \log b^m = 6.8031892839$$
$$\log a^m = 6.8046434637$$

$$\log \frac{b}{a} = \log(1 - p') = 9.9985458202;\quad 1 - p' = \frac{b}{a};\quad p' = \frac{a-b}{a};$$

$$\log(1 - p') = -0.0014541798.$$

$$-p' = \frac{\log(1-p')}{M} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\log(1-p')}{M}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\log(1-p')}{M}\right)^3 + \ldots$$

M ist der Modulus der Briggischen Logarithmen und zwar

$$M = 0.434294481903.$$

Die Rechnung ergiebt hiernach

$$p' = 0.0033427731.821;\quad p' = \frac{1}{299.152813}.$$

$$\log p' = 7.5241069093.3$$
$$\log(2 - p') = 0.3003035143.9$$

$$\log \frac{p'}{2-p'} = \log n' = 7.2238033949.4 = \log \frac{a-b}{a+b}.$$

$\log n' = 7.2238033861$ nach dem Astr. Jahrbuche von 1852, p. 323. Differenz = 88.4

$$\log p'(2 - p') = \log\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \log e^2 = 7.8244104237.2$$

übereinstimmend mit der Landesaufnahme.

Endlich folgt

$$\log e = 8.9122052119$$
$$\text{Astr. Jahrb. 1852:}\quad \log e = 8.9122052075$$
$$\text{Differenz} = 44.$$

Der von Encke berechnete und oben aufgeführte Wert von Q bleibt dagegen ungeändert.

Dritter Abschnitt.

Geodätische Coordinaten.

§. 21. Anlage, Messung und Berechnung eines Dreiecksnetzes und Einführung geodätischer Coordinaten.

Die Vermessung und Berechnung eines über einen grösseren Teil der Erdoberfläche ausgespannten Dreiecksnetzes zerfällt in drei Abteilungen, von denen zwei der Geodäsie angehören, während die dritte aus geodätisch-astronomischen Arbeiten besteht.

1) Die Messung einer Grundlinie und ihr Anschluss an das Dreiecksnetz.

Zu Ende des vorigen und im Anfange dieses Jahrhunderts mass man möglichst lange Grundlinien — so ist z. B. die altbayerische Grundlinie nahe drei Meilen lang —. und brachte dieselben öfter in das Alignement zwischen zwei Kirchtürme oder dergl., so dass man durch Einführung kleiner Hülfsbasen und Herstellung je eines Dreiecks, dessen eine Seite die Verlängerung vom Endpunkte der Grundlinie bis zum nächstliegenden Kirchturm war, auf dem kürzesten Wege die gemessene Linie auf eine Dreiecksseite übertrug. Später ist man von den langen Grundlinien vollständig abgekommen, da ihrer Messung meistens die grössten Schwierigkeiten entgegenstanden, und, ganz abgesehen von Zeit und Kosten, der Erfolg hinsichtlich der Genauigkeit doch ein sehr fraglicher gewesen sein würde. Eine kurze Linie kann selbstverständlich für die Hauptdreiecke, von denen hier allein die Rede ist, keine Dreiecksseite, selbst nicht durch Verlängerung, werden. Umsomehr aber wird das Hauptaugenmerk darauf zu richten sein, dass bei der Ausführung der Messung und Fixierung der Endpunkte mit allen Mitteln der Wissenschaft und der Präcisionsmechanik, sowie mit der grössten Aufmerksamkeit und Gewissenhaftigkeit von Seiten des ausführenden Personales vorgegangen wird. Nur auf diese Weise wird man ein vollständig zuverlässiges, unantastbares Fundament für alle Dreiecksseiten erhalten. Eine weitere Aufgabe ist sodann, diese Grundlinie durch eine besondere Triangulation, welche allmählich zu grösseren Dreiecken übergeht, mit dem Dreiecksnetze in eine Verbindung zu bringen, welche allen Anforderungen der Genauigkeit genügt.

Nicht für jedes Netz ist eine besondere Basismessung unbedingt nötig. Diese Arbeit kann vielfach dadurch umgangen werden, dass eine Übertragung der Grundlinie eines Nachbarnetzes vermittelst einer, beiden Netzen gemeinschaftlichen Dreiecksseite stattfindet.

2) Der Entwurf eines Dreiecksnetzes, seine Berechnung und Ausgleichung. Polarcoordinaten.

Das Ideal eines Dreiecksnetzes ist ein Netz von gleichseitigen Dreiecken, in welchem alle Winkel oder Richtungen mit gleicher Genauigkeit gemessen, und keine Diagonalen als Ersatz für fehlende Messungen eingefügt sind. Es muss daher bei der Auswahl der Netzpunkte das Bestreben darauf gerichtet sein, ein dem Ideale möglichst nahekommendes Gebilde herzustellen, und für jedes Dreieck die drei Winkel durch unmittelbare Messungen zu erhalten. Jeder Winkel ist der Neigungswinkel zweier ebenen Schnitte, welche, durch zwei Eckpunkte eines Dreiecks gelegt, die Lot-

linie des dritten, nämlich des Beobachtungspunktes, zur Durchschnittslinie haben. Wie schon früher erwähnt, können bei messbaren Dreiecken die zwei Vertikalschnitte, welche die Endpunkte derselben Dreiecksseite enthalten, als zusammenfallend angesehen werden, so dass hiernach in der Nähe des Erdmittelpunktes eine dreikantige Ecke gebildet wird. Dieses ist auch der Grund, dass man jedes Dreieck für sich als ein sphärisches behandeln, und zur Berechnung des Excesses die Formeln 25. als vollständig genügend anwenden kann. Für die Berechnung dieses Excesses ist die Kenntnis von vorläufigen Werten der Dreiecksseiten und der Polhöhen der Dreieckspunkte erforderlich. Erstere erhält man dadurch, dass man die einzelnen Dreiecke, einschliesslich der des Basisnetzes, als ebene berechnet. Die Übertragung der astronomisch bestimmten Polhöhe eines Punktes auf die übrigen Netzpunkte wird in einem späteren Paragraphen gelehrt werden, wobei man ebenfalls für die vorläufigen Werte die rechtwinkligen Coordinatendreiecke als ebene auffassen kann. Die durch Einführung der Excesse und durch die nachfolgende Dreiecksberechnung und Ausgleichung des Netzes bewirkten Änderungen in den vorläufigen linearen Längen der Dreiecksseiten und in den Positionen haben gewöhnlich auf die Grösse der Excesse keinen rückwirkenden Einfluss mehr, so dass letztere als unabhängig von den Änderungen der ersteren aufzufassen sind. Durch den aus den gegebenen Elementen des Erdsphäroides nach (34.) abgeleiteten Factor $\frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ bei der Berechnung der sphärischen Excesse erhält das Netz den Character eines über eine sphäroidische Fläche ausgespannten Netzes. Die Unterschiede, welche dadurch entstehen, dass man die einen oder die anderen Elemente verwendet, sind so unerheblich, dass dieselben für die hier gestellten Aufgaben ausser acht gelassen werden können. Dieser Umstand erleichtert ungemein die Arbeit, wenn man genötigt ist, geodätische Coordinaten von einem Sphäroide auf das andere zu übertragen, z. B. von dem Walbeckschen auf das Besselsche. Die Hauptdifferenzen infolge von Anwendung verschiedener Elemente treten erst bei dem Übergange von Polarcoordinaten auf geographische Coordinaten ein, wie später nachgewiesen wird.

Berechnet man nach der erlangten Kenntnis der sphärischen Excesse die Dreiecke nach dem Legendreschen Theoreme als ebene Dreiecke, gleicht das Netz aus und führt schliesslich die Excesse wieder ein, so wird man für jeden Dreieckspunkt, in welchem Winkelmessungen stattgefunden haben, ein Polarcoordinatensystem aus den Längen der von diesem Punkte als Pol ausgehenden Dreiecksseiten — geodätischen Linien — und ihren Richtungen zusammenstellen können, indem man die Richtung einer Dreiecksseite als Anfangsrichtung wählt.

Wollte man ein Dreiecksnetz zwischen mehrere Grundlinien, oder mehrere Netze, von welchen jedes eine besondere Grundlinie hat, zwischen diese hineinzwängen, und eine Übereinstimmung durch Einführung von Zwangsbedingungen herbeiführen, so würde man einen Fehler begehen. Winkel und Längen sind heterogene Grössen, und speciell für den vorliegenden Fall sind die Grundlinien und die Netzwinkel schon durch ihre Herstellung in ihren Änderungen unabhängig von einander. Man kann daher nicht die einen für die Fehler der anderen verantwortlich machen. Die Übereinstimmung darf nur durch Vergleichung und Ausgleichung der Grundlinien unter sich erreicht werden, ohne dadurch die Netzausgleichung im geringsten zu irridieren. Ob für Vermessungen zu topographischen, technischen, wirtschaftlichen, finanziellen und dergleichen Zwecken von dieser Hauptregel abgegangen werden darf, ist eine Frage, die sich aus den Zielen, die man erreichen will, beantwortet, die Vermessung hört aber alsdann auf, eine rein wissenschaftliche zu sein. Die Ausgleichung verschiedener Grundlinien unter sich könnte für bestimmte Fälle in folgender Weise geschehen*). Hat man z. B. von drei Grund-

*) Ferrero, A. „Note sur un procédé pratique pour établir l'accord entre plusieures bases d'une triangulation (Astr. Nachr. Jahrgang 1880, Nr. 2816.)“ giebt über die Begründung dieses Verfahrens näheren Aufschluss.

linien aus einfache Dreiecksketten oder auch ganze Netze ausgespannt, und treffen dieselben schliesslich in einer Dreiecksseite zusammen, so wird man für den Logarithmus dieser Seite drei verschiedene Werte erhalten. Bildet man nun das arithmetische Mittel der drei Logarithmen, so sind die Abweichungen der drei Logarithmen von ihrem arithmetischen Mittel die Correctionen, welche an die Logarithmen der zugehörigen Grundlinien anzubringen sind. Durch die Mittelung der Logarithmen und nicht ihrer zugehörigen Zahlen ist auch zugleich den durch die verschiedenen Längen der Grundlinien hervorgerufenen verschiedenen Gewichten derselben Rechnung getragen. Dieser Ausgleichungsmodus gilt übrigens nur so lange, als man von einer Grundlinie zur anderen nur auf dem einen Wege über die gemeinschaftliche Dreiecksseite gelangen kann. Ein Beispiel wird später folgen.

3) Astronomisch-geodätische Beobachtungen zur Bestimmung der Polhöhe eines Dreieckspunktes und eines von demselben nach einem anderen sichtbaren Dreieckspunkte gerichteten Azimutes. Eignet sich der Punkt (z. B. die Berliner Sternwarte) nicht zu Azimutbestimmungen, so kann auch zwischen zwei anderen Punkten des Netzes ein Azimut gemessen werden. Die Übertragung des Azimuts von dem Beobachtungsorte an den Punkt der beobachteten Polhöhe oder umgekehrt kann alsdann aber nur auf einem indirekten Wege der Berechnung hergestellt werden.

Von dem Punkte der Polhöhenbestimmung aus, dessen Meridian innerhalb des Netzes als Anfangsmeridian angesehen wird, geschieht alsdann die Übertragung der geographischen Coordinaten — geographische Breite, Längendifferenz und Azimut — auf alle übrigen Netzpunkte, wobei die bereits vorhandenen Polarcoordinaten so zu sagen als Träger dienen. Der astronomisch festgelegte Punkt wird der Cardinalpunkt des ganzen Netzes genannt. Durch vorstehend angegebene Berechnung wird dem Netze sein Ort auf der Erdoberfläche in Bezug auf die Breite angewiesen und die Orientierung nach dem Meridiane des Cardinalpunktes bewirkt.

Soll das Netz seiner Lage nach auch gegen andere ausserhalb liegende Punkte oder gegen einen anderen ausserhalb liegenden Meridian als Anfangsmeridian festgelegt werden, so müssen noch geographische Längenbestimmungen zu den gegebenen Polhöhen- und Azimutbestimmungen hinzutreten. Dieses geschieht in neuerer Zeit, wo der Telegraphendraht auch der Wissenschaft in vielseitiger Weise dienstbar gemacht ist, durch Beobachtungen auf astronomisch-telegraphischem Wege.

In vorstehender Darstellung ist der Weg angegeben worden, auf welchem man nach streng mathematischen Principien die ausgeführten, geodätischen und astronomischen Messungen zur Herstellung von Polar- und geographischen Coordinaten zu verwenden hat. Hierbei mag noch erwähnt werden, dass man für wissenschaftliche Untersuchungen über die wirkliche Gestalt der Erde den Begriff Polarcoordinaten ausdehnt. Man versteht darunter ein Coordinatensystem, welches eine solche Ausdehnung hat, dass zur Bildung desselben messbare Dreiecke nicht mehr ausreichen, z. B. ein System, welches die Sternwarte in Berlin zum Pole hat, auf welchen alle astronomisch bestimmten Punkte sämtlicher Dreiecksnetze in Deutschland durch Polar- und geographische Coordinaten bezogen werden. Diese Polarcoordinaten ausführlich wissenschaftlich zu behandeln, gehört nicht mehr in den Rahmen der hier gestellten Aufgaben; es sollen jedoch, wie schon bei früheren Fällen, am betreffenden Orte die aus den Entwickelungen hervorgegangenen Endformeln für die unmittelbare Berechnung dieser Coordinaten gegeben werden.

In den geographischen Coordinaten, welche in den überwiegend meisten Fällen als Endergebnisse der Berechnungen der Landesvermessungen publiciert werden, haben wir ein Coordinatensystem auf einer Projectionsfläche, welche der mathematischen Figur der Erdoberfläche ähnlich ist und sich ohne Beeinträchtigung seiner Genauigkeit über das ganze Rotationssphäroid ausdehnen lässt. Für die praktischen Zwecke ist aber diese Darstellungsweise, welche die Resultate nur in Winkelmass giebt, nicht

direkt zu verwenden. Die topographische Aufnahme behält zwar für die Messtischblätter die Bogen der Meridiane und Parallelen bei, verwandelt aber zuvor das Winkel- und Bogenmass in Längenmass. Für alle anderen praktischen Verwendungen der Landesvermessungs-Resultate sind aber aus denselben abgeleitete lineare, womöglich geradlinige Entfernungen und Richtungen, welche einem rechtwinkligen Coordinatensysteme angehören, die zweckentsprechendsten. Man hat daher einen Weg einzuschlagen, auf welchem man entweder von den geographischen Coordinaten allmählich mit Abnahme des Aufnahme-Rayons zu rechtwinklig-sphäroidischen, zu sphärischen und schliesslich zu ebenen Coordinaten übergeht; oder man wählt den Mantel eines Berührungs-Cylinders oder Kegels als Projectionsfläche, welchen man schliesslich aufschneidet und in eine Ebene ausbreitet. Mit beiden Darstellungsweisen verlässt man den rein wissenschaftlichen Weg, schafft aber für die Praxis brauchbare Werte.

Für die Gesamtheit der vorher aufgeführten und in der Geodäsie zur Verwendung kommenden Coordinatensysteme ist die gemeinsame Bezeichnung „Geodätische Coordinaten“ eingeführt.

Die Lösungen der hierhergehörigen Aufgaben werden auf den nachfolgenden Blättern gegeben werden.

Vorher aber mögen noch Übersichten über vorhandene Grundlagen, welche einesteils bei schon früher ausgeführten Coordinatenberechnungen benutzt wurden, andernteils bei weiteren Berechnungen zur Anwendung kommen, ihren Platz finden.

§. 22. Zusammenstellung der Grundlagen für die bereits vorhandenen und noch zu berechnenden geodätischen Coordinaten.

1. Die Grundlinien.

Baden.

1846. Die Grundlinie bei Heitersheim. Länge = 2124^{m}6499.

Bayern.

1762 wurde schon zwischen München und Dachau eine Grundlinie gemessen, über deren Länge und Verwendung dem Verfasser keine Angaben zu gebote stehen.

1801. Die altbayerische Grundlinie bei München. Länge = 21653^{m}96.

1807. Die fränkische Grundlinie bei Nürnberg. „ = 13796^{m}5605.

1819. Die rheinbayerische Grundlinie Speier † — Oggersheim †. „ = 19794^{m}974.

1820. Die kleine Speyerer Grundlinie von Prof. Schwerd. (Nicht auf den Meereshorizont reduciert.) „ = 859^{m}47255.
Diese Grundlinie hat besonders wissenschaftlichen Wert, da durch dieselbe zuerst nachgewiesen wurde, dass kurze Linien langen vorzuziehen sind.

Um die auf Seite 1 gegebenen Zeitangaben über Beginn und Dauer der bayer. Vermessungsarbeiten genauer festzustellen, möge hier noch folgendes erwähnt werden. 1801 Messung und Berechnung der Grundlinie zwischen München und Aufkirchen. 1802 bis 1807 trigonometrische Vermessungen, beides unter Leitung französischer Geodäten. 1807 Messung und Berechnung der Grundlinie zwischen Nürnberg und Bruck, und im Anschlusse an das erste Netz von 1808 bis 1828, einschliesslich der 1819 ausgeführten Messung der Grundlinie zwischen Oggersheim und Speyer, die Herstellung der weiteren Hauptnetze. Während dieses Zeitraums und noch auf weitere Jahre hinaus lehnten sich an diese Netze die Detailaufnahmen an.

Hessen.

1808. Die Grundlinie zwischen Darmstadt und Griesheim. Länge = 3976^{T}087.

Preussen.

1802. Die Grundlinie am Seeberg bei Gotha wurde in dem genannten Jahre zu messen begonnen; bei der 1806 erfolgten Invasion der Franzosen wurden aber durch den Unverstand gothaischer Beamten die Endpunkte zerstört. Länge ca. 8000^{T}.
1821. Die Grundlinie bei Braack in Holstein. Vorläufige „ $= 3014^{T}.5799$.
1865. „ „ „ „ . Die Revision der Rechnung ergab: „ $= 3014^{T}.45115$.
1871. „ „ „ „ . Neumessung der Landesaufnahme. „ $= 3014^{T}.43536$.
1834. „ „ von Königsberg in Ostpreussen. „ $= 934^{T}.993124$.
1846. „ „ „ Berlin (bei Mariendorf). „ $= 1198^{T}.723025$ *).
1880. „ „ „ „ , noch nicht publicierte Neumessung des geod. Inst.
1847. „ „ „ Bonn. „ $= 1094^{T}.844025$.
1854. „ „ „ Strehlen in Schlesien. „ $= 1417^{T}.3905$.
1879. „ „ „ „ , noch nicht publicierte Neumessung des geod. Inst.
1880. „ „ „ Göttingen. „ $= 5192^{m}.8599$.
Dieselbe hat bis jetzt noch keinen Anschluss an ein Dreiecksnetz.
1883. Die Grundlinie bei Meppen (erst in der Bearbeitung). „ ca. 7039^{m}.

Reichslande.

1804. Die Grundlinie bei Ensisheim im Elsass. Länge $= 19044^{m}.40$.
1877. Die Grundlinie bei Oberhergheim im Elsass — Messung der Königl. preuss. Landesaufnahme — befindet sich in unmittelbarer Nähe der Ensisheimer Grundlinie und ist mit derselben in Verbindung gebracht. Ihre Länge ist noch nicht publiciert.

Sachsen.

1780. Die Grundlinie auf dem Plateau zwischen der Festung Königstein und dem Sonnenstein. Länge in Dresdener Ellen = 7446.3 D. E.
1 Dresdener Elle = 2 Dresdener Fuss. 1 Dresdener Fuss = 125,568 Pariser Linien (1833 zu 125,476 P. L. berichtigt). Diese Grundlinie hat selbstverständlich nur noch historischen Wert.
1872. Die Grundlinie von Grossenhain. Länge $= 4570^{T}.815191$.

Württemberg.

1819. Die Grundlinie zwischen Solitude und Ludwigsburg. Länge $= 6686^{T}.7995$.
(1019 Par. Fuss über dem Meer.)

2. Die Positionen der Cardinal- und Nullpunkte und die Orientierungs-Azimute bezw. Richtungen für die verschiedenen Systeme der geodätischen Coordinaten.

Baden.

Für die älteren Vermessungen, bei welchen allein die Grundlinie bei Heitersheim benutzt ist, dient als Nullpunkt für das rechtwinklig-sphärische Coordinatensystem, Süd $+ x$, West $+ y$, die Mitte der Sternwarte in Mannheim und ihr Meridian als Abscissenaxe. Derselbe Punkt ist zugleich der Cardinalpunkt der geographischen Coordinaten; seine Polhöhe φ wurde angenommen zu

*) Vergl. „Die Küstenvermessung", p. 359. Mit Berücksichtigung später eingeführter anderer Ausdehnungscoefficienten für die Messstangen ergiebt sich die Länge $= 1098^{T}.7317$.

$$\varphi = 49^\circ\ 29'\ 10''.82,$$

und das Azimut Mannheim, trig. Pkt. d. europ. Grdmg. — Durlach, trig. Pkt. d. europ. Grdmg., Süd über West gezählt, zu

$$\alpha = 358^\circ\ 0'\ 33''.09.$$

Bayern.

Für die Aufnahme des Hauptlandes dient München, nördlicher Frauenturm, als Nullpunkt des rechtwinklig-sphärischen Coordinatensystems. Dieses System ist auf eine Kugel vom Radius N [vergl. (24.)] projiciert, welcher in bayerischen Ruten ausgedrückt zum Logarithmus

$$\log N = 6.3402033$$

hat, und dem Querkrümmungshalbmesser für den nördlichen Frauenturm entspricht. Der Meridian des Nullpunktes, projiciert auf die Kugel, ist die Abscissenaxe, Nord $+x$, Süd $-x$, und der darauf senkrechte grösste Kreis, West $+y$, Ost $-y$, die Ordinatenaxe. Die Neigung eines Bogens eines grössten Kreises zwischen zwei Coordinatenpunkten P und P' gegen die Axen wird durch die Directionswinkel WPP' und $W'P'P$ ausgedrückt, wobei die bezüglichen linken Winkelschenkel — die Westrichtungen der Ordinaten in P und P' nach W und W' hin — als Anfangsrichtungen genommen, und die Directionswinkel von West über Nord gezählt werden.

Der nördliche Frauenturm in München ist auch als Cardinalpunkt für die nach den Besselschen Elementen umgerechneten geographischen Coordinaten durch die Positionen φ und λ östlich von Ferro, nämlich

$$\varphi = 48^\circ\ 8'\ 20''.00,$$
$$\lambda = 29^\circ\ 14'\ 15''.00,$$

und das Azimut München, nördl. Frauent. — Aufkirchen, Süd über West,

$$\alpha = 228^\circ\ 59'\ 53''.00$$

zu grunde gelegt.

Für Rheinbayern giebt, mit Beibehaltung des Münchener Querkrümmungshalbmessers als Kugelradius, Mannheim, trigonometrischer Punkt auf der Plattform der Sternwarte, den Nullpunkt des rechtwinklig-sphärischen Coordinatensystems ab, während die Polhöhe und Länge östlich von Ferro

$$\varphi = 49^\circ\ 29'\ 13''.70,$$
$$\lambda = 26^\circ\ 7'\ 23''.40,$$

und das Azimut Mannheim—Speyer, Süd über West,

$$\alpha = 3^\circ\ 40'\ 25''.30$$

den geographischen Coordinaten als Grundlage dient.

Braunschweig.

Die Vermessung von Braunschweig wurde im Zusammenhange mit der hannoverschen Landesvermessung ausgeführt. Das nähere findet man in der Besprechung der hannoverschen Arbeiten unter Preussen.

Hessen

hat zum Nullpunkte des rechtwinkligen, sphärischen Coordinatensystems Darmstadt, Stadtkirche, Nord $+x$, Ost $+y$. Die geographischen Coordinaten dieses Punktes sind angenommen zu

$$\varphi = 49^\circ\ 52'\ 20''.27,$$
$$\lambda = 26^\circ\ 19'\ 16''.44 \text{ östl. v. Fo.}$$

Das Azimut Darmstadt—Melibokus, Nord über Ost, ist

$$\alpha = 205^\circ\ 58'\ 13''.33.$$

Mecklenburg.

Die Resultate der mecklenburgischen Landesvermessung sind zunächst gegeben in den geographischen Coordinaten fast sämtlicher Dreieckspunkte, wobei Granzin für die Polhöhen und die Orientierung als Cardinalpunkt dient, die Längen dagegen auf den Meridian von Schwerin bezogen sind. Bei der Berechnung sind die Besselschen Elemente des Erdsphäroides zu grunde gelegt.

Ferner giebt das auf dem Schlossturm von Schwerin als Nullpunkt bezogene ebene, rechtwinklige Coordinatensystem die Coordinaten aller Punkte und zwar Süd $+ x$, Nord $- x$, West $+ y$, Ost $- y$. Die Formeln für die der mecklenburgischen Landesvermessung eigentümlichen Berechnungen der Coordinaten werden später gegeben.

Aus den geodätisch-astronomischen Beobachtungen auf Granzin ist berechnet dessen Polhöhe

$$\varphi = 53^\circ\ 27'\ 11''.4308,$$

und das Azimut Granzin—Schwerin, Süd über West,

$$\alpha = 243^\circ\ 27'\ 23''.6172.$$

Durch geodätische Übertragung erhält man hieraus für Schwerin

$$\varphi = 53^\circ\ 37'\ 29''.6900,$$

Längenunterschied Schwerin—Granzin, Ost minus West,

$$l = +\ 0^\circ\ 34'\ 59''.1779,$$

Azimut Schwerin—Granzin

$$\alpha = 63^\circ\ 55'\ 31''.9133.$$

Die astronomisch-telegraphisch bestimmte und auf den Schlossturm reducierte Länge von Schwerin östl. v. Ferro ist nach einer Ausgleichung vom Jahre 1879

$$\lambda = 29^\circ\ 4'\ 58''.287.$$

Durch geodätische Übertragung nach den Angaben der Königl. preussischen Landesaufnahme erhält man dagegen nach einer Ausgleichung der Anschlüsse für Schwerin

$$\varphi = 53^\circ\ 37'\ 33''.145,$$
$$\lambda = 29^\circ\ 5'\ 14''.332 \text{ östl. v. Fo.}$$

Oldenburg.

Die trigonometrische Vermessung ist im Anschlusse an die hannoversche Landesvermessung mit Benutzung von Gaussischen Dreiecken und dem auf die alte vorläufige Längenangabe der Braacker Grundlinie (1821) bezogenen Logarithmus der Seite Bremerlehe—Varel 1835 bis 1837 ausgeführt. Als Cardinalpunkt für die geographischen Coordinaten dient der Punkt Bremerlehe, dessen Lage durch geodätische Übertragung von Göttingen gleichfalls von Gauss in folgenden Zahlen mitgeteilt wurde:

$$\varphi = 53^\circ\ 34'\ 7''.239,$$
$$\lambda = 26^\circ\ 15'\ 26''.046 \text{ östl. v. Fo.},$$

Azimut Bremerlehe—Varel, Süd über West:

$$\alpha = 58^\circ\ 15'\ 58''.861.$$

Für die rechtwinklig-sphärischen Coordinaten, ebenso wie für ein Polarcoordinatensystem, wurde der Schlossturm zu Oldenburg als Nullpunkt und sein Meridian als Abscissenaxe angenommen, dessen Positionen zu

$$\varphi = 53^\circ\ 8'\ 22''.447,$$
$$\lambda = 25^\circ\ 52'\ 51''.334 \text{ östl. v. Fo.}$$

berechnet wurden.

Preussen.

Die aus den Jahren 1821 bis 1844 herstammenden Messungen und Berechnungen der Hauptdreiecksnetze und der späteren Anschlüsse 2. und 3. Ordnung in Hannover, einschliesslich Braunschweig, in dem ehemaligen Kurhessen und in Rheinland-Westfalen sind basiert auf die Braacker Grundlinie in ihrer vorläufigen Angabe vom Jahre 1821 und haben alle drei als Cardinalpunkt für die geographischen Coordinaten die Göttinger Sternwarte, deren Position durch folgende Zahlen gegeben ist:

$$\varphi = 51^\circ\ 31'\ 47''\!.85,$$
$$\lambda = 27^\circ\ 36'\ 28''\!.20 \text{ östl. v. Fo.},$$

Azimut Göttinger Sternwarte—Meridianzeichen, Süd über West,

$$\alpha = 180^\circ\ 0'\ 5''\!.465.$$

Als Nullpunkt für das hannoversche, ebene, rechtwinklige Coordinaten-System, Süd $+ x$, West $+ y$, ist ebenfalls die Sternwarte von Göttingen gewählt. Die Correction, welche durch Nachrechnung (1865) der Braacker Grundlinie hervorgerufen wurde, ist von Wittstein in dem „Allgemeinen Coordinaten-Verzeichnis der hannoverschen Landesvermessung. Hannover, 1868" für die Logarithmen der linearen Längen in 7. Decimale, einschliesslich einer Uebertragung der Gaussischen in legale Meter, zu — 69 Einheiten festgestellt worden. Mit dieser logarithmischen Constanten sind sämtliche Coordinaten umgerechnet, und neben den ursprünglichen Angaben mit der neuen Orientierung, Nord $+ x$, Ost $+ y$, in demselben Werke zusammengestellt worden. Die Formeln für die Berechnung dieser Coordinaten folgen weiter hinten.

Für die sphäroidischen, rechtwinkligen Coordinaten, Nord $+ x$, Ost $+ y$, des Hauptcomplexes des ehemaligen Kurhessens gilt als Nullpunkt der Turm der Martinskirche in Cassel, dessen Position zu

$$\varphi = 51^\circ\ 19'\ 6''\!.509,$$
$$\lambda = 27^\circ\ 9'\ 56''\!.956 \text{ östl. v Fo.}$$

berechnet ist. Infolge ihrer Lage wurden von dem Central-Directorium der Vermessungen der Kreis Schmalkalden dem Coordinatensysteme Inselsberg, der Kreis Rinteln dem Systeme Hermannsdenkmal zugeteilt.

Jedoch muss hierbei bemerkt werden, dass die für diese letzten beiden Systeme in den Bestimmungen vom 29. December 1879 gegebenen, und auch die später von der Landesaufnahme für Inselsberg umgerechneten, geographischen Coordinaten vom Inselsberge und Hermannsdenkmale speciell für die trigonometrischen Punkte der beiden Kreise Schmalkalden und Rinteln, wenn deren Positionen dem kurhessischen Positionsverzeichnisse entnommen werden, keine Anwendung finden dürfen. Die zuletzt genannten Positionen sind nämlich auf Göttingen als Cardinalpunkt und auf die Walbeckschen Elemente des Erdsphäroides basiert, während für Inselsberg als Cardinalpunkt Berlin, und die Besselschen Elemente dienten, für Hermannsdenkmal dagegen zwar der Cardinalpunkt Göttingen ist, die Berechnung aber auf dem Schmidtschen Erdsphäroide (2. Angabe) ausgeführt wurde. Für Inselsberg ist vielmehr durch Uebertragung der geographischen Coordinaten des hessischen Dreieckspunktes G, wie derselbe im hessischen Positionsverzeichnisse, pag. 35, sich vorfindet, für den Steinpfeiler auf der Plattform des steinernen Turmes berechnet:

$$\varphi = 50^\circ\ 51'\ 8''\!.4909,$$
$$\lambda = 28^\circ\ 7'\ 54''\!.1055 \text{ östl v. Fo.}$$

Für die Feststellung der geographischen Coordinaten des Hermannsdenkmals wurde das Dreieck Hünenburg-Wittekindstein-Hermannsdenkmal mit den definitiven von Vorländer gegebenen Winkeln und der hessischerseits gegebenen definitiven Seite Hünenburg-Wittekindstein neu berechnet, und hierauf die gefundene Seite Wittekindstein-Hermannsdenkmal, das hessische Azimut derselben auf Wittekindstein und die hessische Angabe

der Position dieses letzteren Punktes zur Berechnung der geographischen Coordinaten des Punktes Hermannsdenkmal verwendet. Dieselbe ergiebt

$$\varphi = 51^\circ\ 54'\ 47''\!.163,$$
$$\lambda = 26^\circ\ 30'\ 15''\!.032 \text{ östl. v. Fo.}$$

Ferner wurden in der ersten Auflage der „Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen, sphärischen Coordinaten etc. Cassel 1868" von dem Verfasser die wegen Umrechnung der Braacker Basis und wegen einer vorläufigen Annahme der Ausgangslinie Göttingen—Meridianzeichen erforderlichen Correctionen der Logarithmen der linearen Längen in 7. Decimale für das Hauptland Kurhessen und den Kreis Schmalkalden zu — 125, für den Kreis Rinteln zu — 179 Einheiten angegeben.

Für die rechtwinkligen Coordinaten des rheinisch-westfälischen Netzes sollte die abgebrochene Spitze des Domchors in Cöln als Nullpunkt und ihr Meridian, Nord $+ x$, Ost $+ y$, als Abscissenaxe dienen. Dieser verlorengegangene Punkt konnte jedoch nur durch Hinzuziehung älterer französischer, linksrheinischer Triangulierungen annähernd genau bestimmt, und so eine Übertragung auf den trigonometrischen Punkt Hünenburg bewirkt werden. Vorländer giebt für Hünenburg, abgeleitet von Göttingen als Cardinalpunkt,

$$\varphi = 52^\circ\ 0'\ 57''\!.696,$$
$$\lambda = 26^\circ\ 8'\ 17''\!.811 \text{ östl. v. Fo.,}$$

die Meridianconvergenz γ gegen die Abscissenaxe

$$\gamma = +\ 1^\circ\ 9'\ 31''\!.74,$$

und die Coordinaten in preussischen Ruten

$$x = +\ 27629^r\!.26,$$
$$y = +\ 31985^r\!.39.$$

Dieses Coordinatensystem für den Nullpunkt Cöln ist von dem Central-Directorium der Vermessungen durch die Systeme 31, 32 und 34, nämlich Hermannsdenkmal, Münster und Homert ersetzt worden.

Durch das im Jahre 1882 bewirkte Zusammentreffen der vom geodätischen Institute neu gemessenen und berechneten hessischen und märkisch-thüringischen Netze erster Ordnung mit den alten hannoverschen und hessischen Netzen in dem Dreiecke Brocken—Inselsberg—Meisner und die von der Landesaufnahme neu ausgeführte Messung der Braacker Grundlinie — eine Benutzung der Göttinger Grundlinie war wegen noch fehlenden Anschlusses an eine Seite des hannoverschen Netzes nicht möglich — konnte vermittelst der Seite Inselsberg—Meisner eine Vergleichung zwischen der Berliner*), der Bonner und der Braacker Grundlinie stattfinden. Diese Vergleichung ergab für die Berliner Grundlinie eine Änderung von — $0^r\!.032$, für die Bonner Grundlinie von $+ 0^r\!.009$ und für die Neumessung der Braacker Grundlinie von $+ 0^r\!.030$.

Die vorstehende Untersuchung hat übrigens nur den Zweck, einen Einblick in die Genauigkeit der neueren geodätischen Arbeiten zu geben. Die gefundenen Berichtigungen auch in die Praxis einzuführen, ist rein eine Frage der Zweckmässigkeit, die aber schon aus dem einen Grunde bezweifelt werden muss, weil durch den Hinzutritt der Göttinger und der Meppener Grundlinie eine abermalige Berichtigung eintreten müsste.

Das frühere Herzogtum Nassau besitzt ein auf die Besselschen Elemente des Erdsphäroides gegründetes Dreiecksnetz. Für die rechtwinklig-sphärischen und geographischen Coordinaten der Dreieckspunkte dient als Ausgangspunkt der trigonometrische Punkt Schaumburg, dessen Position ist

$$\varphi = 50^\circ\ 20'\ 23''\!.63,$$
$$\lambda = 25^\circ\ 38'\ 29''\!.61 \text{ östl. v. Fo.}$$

Sämtliche trigonometrischen Netze der Königl. Landesaufnahme sind auf dem

*) Vergl. die Anmerkung auf Seite 55.

Besselschen Erdsphäroide berechnet und haben durchgängig als Cardinalpunkt für die geographischen Coordinaten ihrer Dreieckspunkte das Centrum der Sternwarte von Berlin, deren Position angenommen ist zu

$$\varphi = 52^\circ\ 30'\ 16''.70,$$
$$\lambda = 31^\circ\ \ 3'\ 41''.25 \text{ östl. v. Fo.}$$

Hieraus hat man durch geodätische Übertragung für Rauenberg, trig. Pkt., abgeleitet

$$\varphi = 52^\circ\ 27'\ 12''.021,$$
$$\lambda = 31^\circ\ \ 2'\ \ 4.928 \text{ östl. v. Fo.}$$

Gemessen ist das Azimut Rauenberg—Berlin, Marienturm, Nord über Ost,

$$\alpha = 19^\circ\ 46'\ 4''.87.$$

Ein Verzeichnis der 40 Coordinatensysteme, welche über den preussischen Staat ausgebreitet sind, mit Angabe der geographischen Coordinaten ihrer Nullpunkte und ihrer Geltungsbereiche folgt in diesem Paragraphen unter 3. nach.

Durch das von dem Königl. preussischen geodätischen Institute für die Zwecke der europäischen Gradmessung gemessene und berechnete rheinische Dreiecksnetz, welches von Rœrmond bis zum Anschlusse an das Schweizer Netz zu beiden Seiten des Rheines sich hinzieht, ist über die preussische Rheinprovinz, Nassau, Hessen, die Pfalz, Elsass und Baden ein Netz erster Ordnung ausgespannt, welches zur Basis die Bonner Grundlinie und als Cardinalpunkt das Centrum der Sternwarte in Bonn mit dem Azimute Bonner Sternwarte—Meridianmarke, Nord über Ost, hat, nämlich

$$\varphi = 50^\circ\ 43'\ 45''.00,$$
$$\alpha = 179^\circ\ 59'\ 40''.23.$$

Durch geodätische Übertragung von Bonn aus sind die geographischen Coordinaten aller Dreieckspunkte gegeben, von welchen ausser Bonn sechs andere Punkte auch astronomisch bestimmte Polhöhen und Azimute haben. Ausserdem giebt die Berechnung noch die auf Bonn als Pol bezogenen Polarcoordinaten der Dreieckspunkte.

In der Voraussicht, dass der Meridian von Greenwich (England) demnächst als alleiniger erster Meridian von allen Nationen angenommen wird, und die Längen von West über Ost von 0° bis 360° wieder bis zum Anfangsmeridian gezählt werden, mögen die neuesten astronomisch-telegraphischen Längenbestimmungen zwischen Greenwich, Paris und Berlin unter Zugrundelegung einer Ausgleichung aus dem Jahre 1879 hier einen Platz finden.

Greenwich—Berlin $= + 13^\circ\ 23'\ 43''.620$,
„ —Paris $= + \ 2^\circ\ 20'\ 15''.375$,
Paris—Berlin $= + 11^\circ\ \ 3'\ 28''.245$.

Hiernach würde, da der Meridian von Ferro 20° westlich von Paris gedacht wird, von allen auf den Meridian von Ferro bezogenen Längenangaben

$$17^\circ\ 39'\ 44''.625$$

abzuziehen sein.

Reichslande.

Das Dreiecksnetz über Elsass-Lothringen ist von der Königl. preuss. Landesaufnahme gemessen und berechnet worden. Von demselben gilt auch das über die Arbeiten dieser Behörde in Preussen Gesagte.

Sachsen.

Für das Königreich Sachsen existieren aus den füheren Jahren zwei Zusammenstellungen von geographischen Coordinaten.

1) Aus dem Jahre 1827 sind für militair-topographische Zwecke 139 Ortsbestimmungen vorhanden. Der Cardinalpunkt ist der mathematische Salon in Dresden

und die Position desselben

$$\varphi = 51^\circ \ \ 3' \ 22'',$$
$$\lambda = 31^\circ \ 23' \ 52''.5 \text{ östl. v. Fo.}$$

2) Aus den Jahren 1826 bis 1828 sind zum Zwecke von Steuerregulierungen die geographischen Coordinaten von 121 Punkten zusammengestellt. Cardinalpunkt ist ebenfalls der mathematische Salon in Dresden und seine Position ist angegeben in folgenden Zahlen:

$$\varphi = 51^\circ \ \ 3' \ 16''.0,$$
$$\lambda = 31^\circ \ 23' \ 55''.0 \text{ östl. v. Fo.}$$

Die neuesten Bestimmungen des Pfeilers auf der Plattform des mathematischen Salons in Dresden sind (Publication von 1883.)

$$\varphi = 51^\circ \ \ 3' \ 13''.82$$
$$\lambda = 31^\circ \ 23' \ 44''.145 \text{ östl. v. Fo.}$$

Eine 1864 begonnene Triangulation erster, zweiter und dritter Ordnung ist gegenwärtig nach ihrer Vollendung in der Publication begriffen. Für die geographischen Coordinaten dient der Basiszwischenpunkt Grossenhain als Cardinalpunkt. Die Breite desselben,

$$\varphi = 51^\circ \ 18' \ 20''.05,$$

und das Azimut Grossenhain—Collm, Nord über Ost,

$$\alpha = 269^\circ \ 58' \ 37''.33$$

sind definitiv durch geodätisch-astronomische Beobachtungen und Berechnungen bestimmt, während

$$\lambda = 31^\circ \ 13' \ 1''.485 \text{ östl. v. Fo.}$$

ebenso wie die letzte Angabe der Länge von Dresden aus den in der Publication der astronomisch-geodätischen Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreiche Sachsen, Berlin, 1883, enthaltenen Werten und aus den Resultaten der Ausgleichung in den Astr. Nachr. Bd. 95 No. 2265 zusammengesetzt ist.

Württemberg.

Der Nullpunkt der rechtwinkligen, sphärischen Coordinaten, Nord $+ x$, Ost $+ y$, ist die Sternwarte von Tübingen mit den geographischen Coordinaten

$$\varphi = 48^\circ \ 31' \ 12''.4,$$
$$\lambda = 26^\circ \ 42' \ 51''.0 \text{ östl. v. Fo.},$$

und dem Azimute Tübingen—Kornbühl

$$\alpha = 169^\circ \ 12' \ 44''.3.$$

Die gegenwärtige neue Vermessung auf dem Besselschen Sphäroide dient nur als Verbindungsglied zwischen dem rheinischen Dreiecksnetze, ausgeführt von dem Königl. preussischen geodätischen Institute, und den südlichen bayerischen Dreiecken. Aus astronomisch-geodätischen Beobachtungen wurden berechnet für die trigonometrische Station Bussen

$$\varphi = 48^\circ \ \ 9' \ 45''.85;$$

Azimut Bussen—Mochenthal

$$\alpha = 17^\circ \ 10' \ 49''.21.$$

Für die Station Solitude ist

$$\varphi = 48^\circ \ 47' \ 14''.37;$$

Azimut Solitude—Hohenzollern

$$\alpha = 189^\circ\ 37'\ 52''.78.$$

Über die Vermessungen der noch übrigen deutschen Staaten waren dem Verfasser keine authentischen Angaben zu Händen. Es darf aber wohl vorausgesetzt werden, dass diese Vermessungen im unmittelbaren Anschlusse an diejenigen der Nachbarländer ausgeführt wurden.

8. Verzeichnis der 40 Coordinatensysteme im preussischen Staate mit Angabe der geographischen Coordinaten der Nullpunkte und ihrer Geltungsbereiche.

1. Kucklinsberg. P. I. L.-A.*) Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 54^\circ\ 27'\ 36''.8055;\ \lambda = 39^\circ\ 37'\ 18''.3505 \text{ östlich von Ferro.}$$

G.-B.**) Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Gumbinnen.

2. Paulinen. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 54^\circ\ 17'\ 21''.1583;\ \lambda = 38^\circ\ 23'\ 59''.3555.$$

G.-B. Land- und Stadtkreis Königsberg, Kreise Allenstein, Pr. Eylau, Fischhausen ohne den dazu gehörigen Teil der frischen Nehrung und des frischen Haffs, Friedland, Gerdauen, Heilsberg, Labiau, Memel, Neidenburg, Ortelsburg, Osterode, Rastenburg, Rössel und Wehlau. (Regierungsbezirk Königsberg.)

3. Markushof, I. P. II. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 54^\circ\ 3'\ 31''.728;\ \lambda = 37^\circ\ 2'\ 24''.369.$$

G.-B. Kreise Braunsberg, Heiligenbeil, Pr. Holland, Mohrungen und der zum Kreise Fischhausen gehörige Teil der frischen Nehrung und des frischen Haffs. (Regierungsbez. Königsberg.) Land- und Stadtkreise Danzig und Elbing, Kreis Marienburg. (Regierungsbez. Danzig.)

4. Thurmberg. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 54^\circ\ 13'\ 31''.8753;\ \lambda = 35^\circ\ 47'\ 32''.4975.$$

G.-B. Kreise Berent, Karthaus, Neustadt, Pr. Stargard. (Regierungsbez. Danzig.)

5. Kauernik. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 53^\circ\ 23'\ 21''.5951;\ \lambda = 37^\circ\ 15'\ 53''.1757.$$

G.-B. Kreise Löbau, Rosenberg und Strassburg. (Regb. Marienwerder.)

6. Thorn, Rathausturm. P. I. L.-A. Steinkubus auf d. Einfassungsmauer des nordöstlichen Ecktürmchens.

$$\varphi = 53^\circ\ 0'\ 42''.5371;\ \lambda = 36^\circ\ 16'\ 26''.1154.$$

G.-B. Kreise Graudenz, Kulm, Marienwerder, Schwetz, Stuhm und Thorn. (Regierungsbez. Marienwerder.)

7. Heinrichsthal. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$$\varphi = 53^\circ\ 42'\ 46''.4118;\ \lambda = 35^\circ\ 9'\ 48''.3641.$$

G.-B. Kreis Bütow, Lauenburg, Rummelsburg und Stolp. (Regierungsbez.

*) P. I. L.-A. bedeutet trigonometrischer Punkt I. Ordnung der Königl. preussischen Landesaufnahme.

**) G.-B. bedeutet Geltungsbereich des Coordinatensystems.

Köslin.) Kreise Flatow, Konitz, Schlochau und Tuchel. (Regierungsbez. Marienwerder.)

8. Gollenberg. P. I. L.-A. Mittelpunkt d. monumentalen Kreuzes.

$\varphi = 54° \; 12' \; 30''.8584; \; \lambda = 33° \; 53' \; 46''.4441.$

G.-B. Kreise Belgard, Bublitz, Dramburg, Köslin, Kolberg-Körlin, Neustettin, Schivelbein, Schlawe. (Regbez. Köslin.) Kreis Deutsch-Krone. (Regbez. Marienwerder.)

9. Gnesen. P. I. L.-A. Knopfmitte des südlichen Domturmes und ein Nagel mit kupfernem Knopf in dem Fussboden der Laterne des Turmes.

$\varphi = 52° \; 32' \; 17''.5346; \; \lambda = 35° \; 15' \; 40''.2180.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Bromberg mit Ausnahme des Kreises Czarnikau.

10. Josephsberg. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 51° \; 59' \; 15''.6770; \; \lambda = 33° \; 52' \; 1''.5980.$

G.-B. Kreise Arnswalde, Friedeberg und Züllichau-Schwiebus. (Regbez. Frankfurt a. O.) Kreis Czarnikau. (Regbez. Bromberg.) Kreise Birnbaum, Bomst, Buk, Fraustadt, Kosten, Meseritz und Samter. (Regbz. Posen.)

11. Schroda. P. I. L.-A. Eiserner Nagel in dem Fussboden der Plattform des stumpfen Pfarrturmes.

$\varphi = 52° \; 13' \; 52''.9454; \; \lambda = 34° \; 56' \; 40''.6334.$

G.-B. Stadt- und Landkreis Posen, Kreise Adelnau, Kröben, Krotoschin, Obornik, Pleschen, Schildberg, Schrimm, Schroda, Wreschen. (Regbez. Posen.)

12. Pschow, Kirche. P. I. L.-A. Knopf des östlichen Turmes.

$\varphi = 50° \; 2' \; 31''.4356; \; \lambda = 36° \; 3' \; 45''.9849.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbez. Oppeln mit Ausnahme der Kreise Grottkau und Neisse.

13. Rummelsberg. P. I. L.-A. Kreuz in einer Granitplatte auf der steinernen Gallerie des Belvedère. Excentrisch.

$\varphi = 50° \; 42' \; 12''.6833; \; \lambda = 34° \; 46' \; 44''.4210.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbez. Breslau und die Kreise Grottkau und Neisse des Regbezks. Oppeln.

14. Gröditzberg. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 51° \; 10' \; 41''.4963; \; \lambda = 33° \; 25' \; 40''.5751.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbezks. Liegnitz mit Ausnahme des Stadt- und Landkreises Görlitz, sowie der Kreise Hoyerswerda, Rothenburg und Sagan.

15. Kaltenborn. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 51° \; 55' \; 44''.5336; \; \lambda = 32° \; 19' \; 43''.6659.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbezks. Frankfurt a. O. mit Ausnahme der Kreise Arnswalde, Friedeberg, Züllichau-Schwiebus und Luckau, sowie der Stadt- und Landkreis Görlitz und die Kreise Hoyerswerda, Rothenburg und Sagan des Regbzks. Liegnitz.

16. Bahn. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 53° \; 6' \; 6''.6450; \; \lambda = 32° \; 22' \; 5''.2034.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbzks. Stettin mit Ausnahme der Kreise Anklam und Demmin.

17. Greifswald. P. I. L.-A. Mitte der Helmstange unter dem Knopf des Kirchturmes.

$\varphi = 54^\circ\ 5'\ 49''.1594;\ \lambda = 31^\circ\ 2'\ 43''.7053.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbzks. Stralsund und die Kreise Anklam und Demmin des Regbzks. Stettin.

18. Müggelsberg. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 52^\circ\ 25'\ 7''.1338;\ \lambda = 31^\circ\ 17'\ 37''.9332.$

G.-B. Stadt Berlin, Stadtkreis Charlottenburg, Kreise Angermünde, Oberbarnim, Niederbarnim, Beeskow - Storkow, Jüterbock - Luckenwalde, Prenzlau, Teltow, Templin. (Regbez. Potsdam.)

19. Götzerberg. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 52^\circ\ 26'\ 14''.1346;\ \lambda = 30^\circ\ 23'\ 43''.7870.$

G.-B. Stadtkreis Potsdam, Kreise Osthavelland, Westhavelland, Ostpriegnitz, Ruppin und Zauch-Belzig. (Regbez. Potsdam.)

20. Torgau, Frauenkirche. P. I. L.-A. Helmstange des Turmes unter dem Knopfe.

$\varphi = 51^\circ\ 33'\ 40''.9038;\ \lambda = 30^\circ\ 40'\ 27''.3695.$

G.-B. Kreise Bitterfeld, Delitzsch, Liebenwerda, Schweinitz, Torgau und Wittenberg. (Regbz. Merseburg.) Kreis Luckau. (Regbez. Frankfurt a. O.)

21. Bukersroda, Kirche. P. I. L.-A. Helmstange des Turmes unter dem Knopfe.

$\varphi = 51^\circ\ 10'\ 35''.6276;\ \lambda = 29^\circ\ 18'\ 29''.0172.$

G.-B. Stadtkreis Halle, Gebirgs- und Seekreis Mansfeld, Kreise Eckartsberga, Merseburg, Naumburg, Querfurt, Saalkreis, Sangerhausen, Weissenfels u. Zeitz. (Regbez. Merseburg.) Kreis Ziegenrück. (Regbez. Erfurt.)

22. Inselsberg. P. I. L.-A. Steinpfeiler auf der Plattform des neuen steinernen Turmes.

$\varphi = 50^\circ\ 51'\ 8''.5674;\ \lambda = 28^\circ\ 8'\ 3''.9542.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbzks. Erfurt mit Ausnahme des Kreises Ziegenrück u. der zum Kreise Nordhausen gehörigen Enklave Benneckenstein. Kreis Schmalkalden des Regbzks. Cassel. (Siehe Seite 58.)

23. Magdeburg, Domkirche. P. I. L.-A. Fuss des Kreuzes auf dem nördl. Domturm.

$\varphi = 52^\circ\ 7'\ 34''.5070;\ \lambda = 29^\circ\ 18'\ 7''.8178.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regbzks. Magdeburg mit Ausnahme der Kreise Halberstadt und Wernigerode und der zum Kreise Gardelegen gehörigen Enklaven Wolfsburg, Hesslingen und Hehlingen. Kreis Westpriegnitz. (Regbez. Potsdam.) Kreis Dannenberg. (Landdrosteibez. Lüneburg.)

24. Ostenfeld. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 54^\circ\ 28'\ 12''.6744;\ \lambda = 26^\circ\ 54'\ 2''.7995.$

G.-B. Kreise Apenrade, Eckernförde, Eiderstedt, Flensburg, Hadersleben, Husum, Schleswig, Sonderburg, Tondern, Norder- und Süderdithmarschen, Rendsburg. (Regbez. Schleswig.)

25. Rathkrügen. P. I. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 53^\circ\ 49'\ 6''.2171;\ \lambda = 27^\circ\ 42'\ 31''.9268.$

G.-B. Stadtkreis Altona, Kreise Kiel, Pinneberg, Segeberg, Steinburg und Stormarn. (Regbez. Schleswig.)

26. Bungsberg, Elisabethturm. P. I. L.-A. Neue Flaggenstange und eingemeisseltes Kreuz auf der oberen Fläche der rechten Treppenwange von Granit am Fusse des Turmes. Beide Festlegungen excentrisch.

$\varphi = 54° \ 12' \ 39''.9835; \ \lambda = 28° \ 23' \ 34''.9115.$

G.-B. Kreise Plön, Oldenburg und Herzogtum Lauenburg. (Regbez. Schleswig.)

27. Celle, Stadtkirche. P. I. L.-A. Kirchturmspitze.

$\varphi = 52° \ 37' \ 32''.6709; \ \lambda = 27° \ 44' \ 54''.8477.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Landdrosteibezirks Lüneburg mit Ausnahme des Kreises Dannenberg. Land- und Stadtkreis Hannover, Kreis Hameln mit Ausnahme der Enklave Polle und Kreis Wennigsen. (Landdrosteibez. Hannover.) Die zum Kreise Gardelegen des Regierungsbezirks Magdeburg gehörigen Enklaven Wolfsburg, Hesslingen und Hehlingen.

28. Kaltenborn. P. II. L.-A. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 51° \ 47' \ 47''.2820; \ \lambda = 27° \ 56' \ 28''.1079.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Landdrosteibezirks Hildesheim, die zum Kreise Nordhausen, Regierungsbez. Erfurt, gehörige Enklave Benneckenstein, sowie die Kreise Halberstadt und Wernigerode des Regbzks. Magdeburg.

29. Silberberg. Trig. Punkt I. Ordnung der hannoverschen Landesvermessung.

$\varphi = 53° \ 43' \ 52''.787; \ \lambda = 26° \ 43' \ 17''.781.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Landdrosteibezirks Stade und die Kreise Diepholz, Hoya, Nienburg des Landdrosteibezirks Hannover.

30. Windberg. Trig. Punkt I. Ordnung der hannoverschen Landesvermessung.

$\varphi = 52° \ 52' \ 51''.566; \ \lambda = 25° \ 11' \ 39''.876.$

G.-B. Sämtliche Kreise der Landdrosteibezirke Aurich und Osnabrück.

31. Hermannsdenkmal. Trig. Punkt I. Ordnung der rheinisch-westfälischen Katastervermessung. Mittelpunkt des kreisrunden Unterbaues des Denkmales.

$\varphi = 51° \ 54' \ 47''.182; \ \lambda = 26° \ 30' \ 16''.647.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Minden und die zum Kreise Hameln, Landdrosteibezirk Hannover, gehörige Enklave Polle, sowie Kreis Rinteln des Regbezks. Cassel. (Siehe Seite 59.)

32. Münster, Überwasserturm. Trig. Punkt I. Ordnung der rheinisch-westfälischen Katastervermessung.

$\varphi = 51° \ 57' \ 56''.016; \ \lambda = 25° \ 17' \ 14''.372.$

G.-B. Stadt- und Landkreis Münster, Kreise Beckum, Steinfurt, Tecklenburg, Warendorf. (Regbez. Münster.)

33. Bochum, katholische Kirche. P. II. L.-A. Mitte der Helmstange unter dem Turmknopf.

$\varphi = 51° \ 29' \ 1''.254; \ \lambda = 24° \ 53' \ 16''.059.$

G.-B. Kreise Ahaus, Borken, Koesfeld, Lüdinghausen, Recklinghausen. (Regbez. Münster.) Stadt- und Landkreise Bochum und Dortmund, Kreise Hagen, Hamm und Iserlohn. (Regbez. Arnsberg.) Stadt- und Landkreis Essen. (Regbez. Düsseldorf.)

34. H o m e r t. Trig. Punkt I. Ordnung der rheinisch-westfälischen Katastervermessung.

$\varphi = 51° \; 15' \; 52''.27; \; \lambda = 25° \; 46' \; 18''.39.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Arnsberg mit Ausnahme der Stadt- und Landkreise Bochum und Dortmund, sowie der Kreise Hagen, Hamm und Iserlohn.

35. C a s s e l. (St. Martinsturm.) Trig. Punkt der topographischen Aufnahme von Kurhessen.

$\varphi = 51° \; 19' \; 6''.509; \; \lambda = 27° \; 9' \; 56''.956.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Cassel mit Ausnahme der Kreise Rinteln und Schmalkalden.

36. S c h a u m b u r g. Trig. Punkt der nassauischen Landesvermessung. Centrum des Schlossturmes, bezeichnet auf einer im Boden desselben eingesetzten Steinplatte mit der Aufschrift: „Cardinalpunkt Herzoglich Nassauischer Landesvermessung".

$\varphi = 50° \; 20' \; 23''.63; \; \lambda = 25° \; 38' \; 29''.61.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Wiesbaden und Kreis Wetzlar des Regierungsbezirks Koblenz.

37. F l e c k e r t. Trig. Punkt der europäischen Gradmessung und der nassauischen Landesvermessung. Eingemauerter Stein und Platte mit Kreuz und 4 versenkte Hausteine mit Kreuzen, nach den 4 Himmelsrichtungen $1,^{m}65$ vom Centrum entfernt.

$\varphi = 50° \; 11' \; 15''.581; \; \lambda = 0° \; 30' \; 26''.474$ östl. v. d. Sternwarte zu Bonn.

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Koblenz mit Ausnahme des Kreises Wetzlar.

38. C ö l n. Trig. Punkt der europäischen Gradmessung. Centrum des eisernen Pfeilers auf dem Dachreiter, welcher im Dome aufbewahrt wird.

$\varphi = 50° \; 56' \; 33''.346; \; \lambda = 0° \; 8' \; 22''.715$ westl. v. d. Sternw. z. Bonn.

G.-B. Sämtliche Kreise der Regierungsbezirke Köln und Düsseldorf mit Ausnahme des Land- und Stadtkreises Essen.

39. L a n g s c h o s s. Trig. Punkt der europäischen Gradmessung. Centrum des Holzpfeilers von 1869.

$\varphi = 50° \; 40' \; 2''.667; \; \lambda = 0° \; 48' \; 33''.185$ westl. v. d. Sternw. z. Bonn.

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Aachen.

40. R i s s e n t h a l. Punkt II. Ordnung der Triangulation von Elsass-Lothringen. Stein und Platte mit Kreuz.

$\varphi = 49° \; 28' \; 40''.8762; \; \lambda = 24° \; 25' \; 31''.1433.$

G.-B. Sämtliche Kreise des Regierungsbezirks Trier.

Die in den vorstehenden Zusammenstellungen 1. bis 3. gegebenen Grundlagen für die verschiedenen Vermessungen innerhalb Deutschlands wurden nachfolgenden Werken entnommen.

Triangulierung des Grossherzogtums Baden, in der Zeit von 1823 bis 1852 ausgeführt von Oberst Klose und Obergeometer Rheiner. Carlsruhe 1873. — Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage. München 1873. — Grossherzoglich mecklenburgische Landesvermessung. I. bis IV. Theil. Schwerin 1882. — Die Publicationen der beiden Königlich preussischen Vermessungsbehörden: Geodätisches Institut und Landesaufnahme. — Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844. Hannover 1868. — Beiträge zur Geographie Kurhessens und der um-

liegenden Gegenden. Cassel 1839. — Positions-Verzeichnis aus der topographischen Aufnahme vom Kurfürstentum Hessen. Cassel 1857. — Resultate der in den Jahren 1835, 1836 und 1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogtums Oldenburg. — Die Landesvermessung des Herzogtums Nassau. Wiesbaden 1863. — Die Vermessungen im Königreiche Sachsen von A. Nagel. Dresden 1876. — Historische Notizen über die topographische Landesaufnahme des Königreichs Sachsen, insbesondere über den Oberreitschen topographischen Atlas von M. Schmidt in der Zeitschrift für Vermessungswesen. Bd. 13, Jahrg. 1884, p. 260. — Kritischer Wegweiser im Gebiete der Landkartenkunde. Berlin 1829 bis 1835. — Briefliche Mitteilungen wurden dem Verfasser in dankenswertester Weise gemacht von den Herren Geh. Regierungsrat Professor Nagel in Dresden, Professor Dr. Nell in Darmstadt, Professor Dr. von Zech in Stuttgart. — Das unter 3. gegebene Verzeichnis ist ein Auszug der „Bestimmungen über den Anschluss der Specialvermessungen an die trigonometrische Landesvermessung. Laut Beschluss des Centraldirektoriums der Vermessungen im preussischen Staate vom 29. Dec. 1879.“ Die in diesem Verzeichnisse von Nr. 1 bis 28 incl. gegebenen φ und λ sind die von der Königlich preussischen Landesaufnahme durch Umrechnung auf 4 Decimalen der Secunden ausgedehnten, noch nicht publicierten, dem Verfasser auf das bereitwilligste mitgeteilten Angaben. Die Umrechnungen der übrigen Nummern sind auch schon in der Bearbeitung.

§. 23. Anordnung und Gebrauch der im vierten Abschnitte zusammengestellten Tafeln zur Berechnung geodätischer Coordinaten.

In den nachfolgenden Paragraphen werden bei den nach daselbst entwickelten Formeln auszuführenden logarithmischen Berechnungen geodätischer Coordinaten die Zahlengrössen ihre Anwendung finden, welche in dem vierten Abschnitte in „Tafeln zur Berechnung geodätischer Coordinaten“ zusammengestellt sind. Es soll daher vorher die Art der Anordnung und der Gebrauch dieser Tafeln gezeigt werden; die Methode der Berechnung derselben aber wird, soweit dieses noch nötig erscheint, später im vierten Abschnitte selbst ihren Platz finden.

Aus den im zweiten Abschnitte für die Krümmungsradien R und N entwickelten Formeln ist ersichtlich, dass dieselben veränderliche Grössen, und zwar Functionen der geographischen Breite φ sind. Diesem entsprechend sind in der Tafel I. die verschiedenen Zahlengrössen in Gruppen so zusammengestellt, dass in der ersten Vertikalspalte mit dem Kopfe „Geogr. Breite. φ“ die Breiten von 36° bis 71°, und zwar in Intervallen von 10 Minuten, als Argumente aufgeführt sind. Die zweite Vertikalspalte, „Länge des Meridianbogens vom Äquator bis φ.“ mit dem Symbole „q^m“, enthält, in Meter ausgedrückt, die Meridianbogen vom Äquator bis zu der in der Argumentenspalte stehenden Breite. Ausserdem sind noch deren Differenzen, d. h. die Längen der Bogen zwischen den entsprechenden, 10′ von einander abstehenden Breiten aufgeführt. Die beiden folgenden Vertikalspalten enthalten für die in der Spalte φ stehenden Breiten die logarithmischen Werte der Bogenlängen von 1 Secunde im Meridian und im Perpendikel und führen dem entsprechend im Kopfe die Aufschriften

$$\overset{(1)}{\log R \sin 1''} \quad \text{und} \quad \overset{(2)}{\log N \sin 1''}.$$

Durch Addition des unter dem Striche der Spalten (1) und (2) stehenden constanten Logarithmus 5,31... zu (1) und (2) erhält man log R bezw. log N. Auf der gegenüberstehenden Seite rechts sind zuerst die Argumente φ wiederholt; hierauf folgen die Vertikalspalten mit den Überschriften und ihren Symbolen:

$$\overset{(3)}{\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}}; \quad \overset{(4)}{\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}}; \quad \overset{(5)}{\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}}; \quad \overset{(6)}{\log \frac{1}{2\,RN}}.$$

Die Logarithmen unter der Bezeichnung (3) dienen, wie schon früher gezeigt, zur Be-

rechnung der sphärischen Excesse der geodätischen Dreiecke. Die Verwendung von (4), (5) und (6) wird später klar werden.

Unter dem Striche der Spalte (3) steht noch

$$(3)^a = (3) + 8{,}5958917.9 = \log \frac{1}{rn}.$$

Durch Addition des constanten Logarithmus 8,59... zu (3) erhält man nach Formel (35.) den Logarithmus des Gaussischen Krümmungsmasses $\frac{1}{rn}$ für die Breite φ. Ebenso steht unter Spalte (6)

$$\log \frac{1}{6RN} = (6)^a = (6) + 9{,}52288 - 10.$$

Durch Addition von 9,5... zu dem betreffenden Tafelwerte von (6) erhält man $\log \frac{1}{6RN}$ für dieselbe Breite, welcher (6) angehört.

Am Ende der Tafel ist zur Berechnung der Argumente bei der Anwendung der Tafelwerte von (3) und (1) noch ein Täfelchen für $\log \left(\frac{2}{3\ R \sin 1'}\right) = (7)$ beigefügt.

Sämtliche Tafelwerte beziehen sich auf das Besselsche Erdsphäroid.

Die Tafel IA. ist als Anhang zu I. zu betrachten; die Tafelwerte haben die Walbeckschen Elemente (siehe pag. 49) des Erdsphäroides zur Grundlage, und sind nur bei der Berechnung der geodätischen Coordinaten der trigonometrischen Punkte in den Gebietsteilen des ehemaligen Kurfürstentums Hessen zu verwenden. Diese Tafel enthält, wie die vorhergehende, ebenfalls die Spalten für φ, (1), (2), (3) und (5), statt der Spalte für q^m aber sind die beiden Spalten x^m eingeführt. Die Zahlenwerte der Spalten x^m werden dadurch gebildet, dass man nicht den Anfang des Meridianbogens in dem Äquator annimmt, sondern denselben in den Nullpunkt des betreffenden Coordinatensystems verlegt. Die Zahlen entsprechen alsdann den Abscissen der Argumente φ, bezogen auf den Nullpunkt des rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensystems. Die hier fehlende Spalte für (4) wird durch die Spalte für (5) vollständig ersetzt, und die Logarithmen für die ebenfalls hier fehlende Spalte (6) bezw. $(6)^a$ werden aus der entsprechenden Spalte der Tafel I. entnommen. Unter dem Striche sind noch für die drei hier in betracht kommenden Nullpunkte die Zahlenwerte von φ_0, λ_0 beigefügt, ferner das Täfelchen für $\log \left(\frac{2}{3\ R \sin 1'}\right)$.

Zur Kennzeichnung eines aus den Tafeln abgeleiteten oder noch abzuleitenden Zahlenwertes dient dessen Functionszeichen mit dem Argumente als Index, wobei für die Mittel von 2 oder 3 Argumenten derselben Art folgende Bezeichnungen im Indexe gelten sollen: $n\,n_1$ für $\frac{1}{2}(n + n_1)$, $n\,n_1\,n_2$ für $\frac{1}{3}(n + n_1 + n_2)$ u. s. w.; $\log \omega''$, $\log \omega^m$ werden im Index kurz durch ω'', ω^m bezeichnet, da ein Irrtum ausgeschlossen ist. Die in den Tafeln rechts von den Hauptzahlen einer Spalte stehenden Differenzen werden durch ein δ vor dem Symbole der Hauptzahl mit dem zugehörigen Index dargestellt; alle übrigen, nicht unmittelbar in den Tafeln stehenden Differenzen derselben Funktionen erhalten das Functionszeichen mit vorgesetztem Δ. Die einer gegebenen oder gesuchten Grösse in den Tafeln zunächstliegende gleichartige Grösse erhält den Index t, z. B. die dem Argumente φ zunächstliegende Tafelgrösse wird durch φ_t bezeichnet. Das Symbol für eine nur in Graden, nur in Minuten oder nur in Secunden darzustellende Winkelgrösse wird mit der Bezeichnung ° bezw. ′ oder ″ versehen. Die wahre Länge irgend eines in Meter ausgedrückten Erdbogens ist ω^m. Dieser Bogen, bezogen auf den Radius 1, geht über in $\frac{\omega^m}{\varrho^m} = \omega$, worin ϱ^m der betreffende Krümmungsradius R, N, $\sqrt{RN}$ etc., ausgedrückt in Meter, ist. Wird ω durch sin 1″ dividiert, so erhält man $\frac{\omega^m}{\varrho^m \sin 1''} = \frac{\omega}{\sin 1''} = \omega''$, d. h. den Bogen ω ausgedrückt in Secunden.

Soll in Tafel I. zu einem gegebenen φ als Argument der zugehörige Logarithmus aus den Spalten (1) bis (7), und umgekehrt zu einer gegebenen logarithmischen Function von der Form (1) bis (7) das zugehörige Argument φ berechnet werden, so hat man genau so zu verfahren, wie dieses für logarithmische Berechnungen mit gewöhnlichen Logarithmentafeln vorgeschrieben ist. Es bedarf daher nur für andere specielle Fälle noch besonderer Erörterungen.

a) Der Logarithmus der wahren, in Meter ausgedrückten Länge des Meridianbogens $\varDelta q^{m}_{\varphi_1 - \varphi}$ zwischen den Breiten φ und φ_1 wird gefunden, wenn man zu $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)$ aus Spalte (1) den zugehörigen Logarithmus sucht und zu demselben $\log(\varphi_1 - \varphi)''$ addiert, nämlich

$$\log \varDelta q^{m}_{\varphi_1 - \varphi} = \log(\varphi_1 - \varphi)'' + (1)_{\varphi_1 \varphi}.$$

Derselbe Bogen für den Radius 1 ist

$$\varDelta q_{\varphi_1 - \varphi} = (\varphi_1 - \varphi)'' \sin 1''.$$

b) Die Grösse q^{m}, d. h. die Länge des Meridianbogens in Meter vom Äquator bis zur Breite φ, findet man wie folgt.

Liegt der Breite φ die Tafelgrösse φ_t mit dem correspondierenden q^{m}_{t} zunächst, so ist nach a)

$$\log \varDelta q^{m}_{\varphi - \varphi_t} = \log(\varphi - \varphi_t)'' + (1)_{\varphi\varphi_t}$$

und hierauf

$$q^{m} = q^{m}_{t} + \varDelta q^{m}_{\varphi - \varphi_t}.$$

Bezeichnet man die Breite des Nullpunktes P_0 eines Coordinatensystems mit φ_0, die zugehörige Meridianbogenlänge mit q^{m}_{0}, so ist

$$q^{m}_{0} = q^{m}_{t} + \varDelta q^{m}_{\varphi_0 - \varphi_t}.$$

Zieht man q^{m}_{0} von q^{m} ab, welche Grösse einem Punkte P des Meridians (der Abscissenaxe) in der Breite φ entspricht, so wird

$$q^{m} - q^{m}_{0} = x^{m},$$

nämlich gleich der Abscisse des Punktes P.

c) Zu einem gegebenen q^{m} findet man die zugehörige Breite φ, wenn man $q^{m} - q^{m}_{t} = z^{m}$, $\varphi - \varphi_t = \zeta$ setzt, und für die Indexbestimmung zu (1) den Wert von ζ in Minuten aus folgender Gleichung bestimmt

$$\zeta' = \frac{10\,z}{\delta q},$$

alsdann ist

$$\log \zeta'' = \log z^{m} + cpl\,(1)_{\varphi_t + \frac{1}{2}\zeta'}$$

und schliesslich

$$\varphi = \varphi_t + \zeta''.$$

d) Die Gleichung in a) für $\varDelta q^{m}_{\varphi_1 - \varphi}$ liefert nur so lange einen richtigen Wert, als man den Bogen $\varDelta q^{m}_{\varphi_1 - \varphi}$ als einen Kreisbogen vom Radius $R_{\varphi_1 \varphi}$ auffassen darf. Für einen grösseren Meridianbogen, bei welchem der elliptische Charakter berücksichtigt werden muss, ist die Berechnung, wenn man die Bezeichnungsweise aus c) beibehält, d. h.

$$(\varphi - \varphi_t) = \zeta;\ \varphi_1 - \varphi_{t_1} = \zeta_1;\ q^{m} - q^{m}_{t} = z^{m};\ q^{m}_{1} - q^{m}_{t_1} = z^{m}_{1}$$

setzt, die folgende

$$\log z^{m} = \log \zeta'' + (1)_{\varphi\varphi_t};\ \log z^{m}_{1} = \log \zeta''_{1} + (1)_{\varphi_1 \varphi_{t_1}}$$

und schliesslich

$$\Delta q^m_{\varphi_1 - \varphi} = \Delta q^m_{\varphi_{t_1} - \varphi_t} + z_1{}^m - z^m.$$

Die Function (3) der Tafel wird bei der Berechnung des sphärischen Excesses eines geodätischen Dreiecks benutzt, und hat als Argument das arithmetische Mittel der drei Breiten φ, welche den drei Eckpunkten des Dreiecks zukommen.

Der Gebrauch der übrigen Functionen (1), (2), (4), (5), (6) und (7) bedarf keiner besonderen Erläuterung.

Die Tafel IA. wird im allgemeinen in derselben Weise wie Tafel I. benutzt, nur wird die Berechnung von q^m dadurch einfacher, dass $q^m_0 = 0$ und $\Delta q^m_{\varphi_1 - \varphi_0} = x^m$, d. h. gleich der Abscisse des Punktes P_{φ_1} ist.

Hierbei soll für Tafel I. noch folgendes bemerkt werden:

Wenn man längere Zeit in demselben Rayon eines Coordinatensystems zu arbeiten hat, wird es zweckmässig sein, das q^m für den Nullpunkt des Systemes zu berechnen, und in den betreffenden kleinen Teil der Tafel I. statt q^m die Abscissen $\pm\, x^m$ einzuführen.

Die Tafel II. ist in die höhere Geodäsie eingeführt unter der Bezeichnung „Besselsche Tafeln zur sphäroidischen Übertragung". Dieselben werden benutzt bei der Übertragung der geographischen Coordinaten und des Azimutes vom Punkt P nach dem Punkt P_1, wenn die geodätische Linie PP_1 eine solche Länge hat, dass dieselbe nicht mehr als zusammenfallend mit dem Durchschnitte der Erdoberfläche und eines Vertikalschnittes durch beide Punkte P und P_1 aufgefasst werden kann; ebenso für den umgekehrten Fall, wenn unter derselben Voraussetzung aus den geographischen Coordinaten zweier Punkte P und P_1 die zwischen denselben liegende geodätische Linie und ihre Azimute in diesen Punkten gesucht werden. Diese Tafeln finden hier keine unmittelbare Anwendung, und sie sind nur aufgenommen, damit die Tafelsammlung auch bei grösseren geodätischen Berechnungen benutzt werden kann, zu welchem Zwecke die Formeln hierzu, wenn auch ohne Entwickelung, gleichfalls an den betreffenden Stellen aufgenommen sind. Die in diesen Tafeln enthaltenen Logarithmen von α, β, γ, α', β' sind Functionen der Breite und des Azimuts, — anwendbar zwischen 36° bis 71° der Breite und für Werte des Azimuts von 0° bis 360° —. Dem entsprechend ist auch das Argument in der ersten Vertikalspalte aus log cos m, einer Function von φ und α, und dem constanten Gliede $\log \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}$ bezw. $\log \sqrt{\frac{0{,}75\ e^2}{1-0{,}75\ e^2}}$ durch Addition zusammengesetzt. Die log α u. s. w. können jedoch nur bei Berechnungen mit 7-, höchstens 8-stelligen Logarithmen angewendet werden. Wo diese Logarithmen nicht mehr genügen und 10-stellige genommen werden müssen, sind auch die α, β ... unmittelbar aus den a. a. O. gegebenen Formeln zu berechnen. Das Argument ergiebt sich jedesmal aus der Berechnung selbst vor seiner Anwendung und wird analog wie in Tafel I. benutzt.

Mit Genehmigung des Herrn Professor Dr. Albrecht sind diese Tafeln aus dessen „Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen, 2. Aufl. Leipzig, 1879" abgedruckt.

Die Tafel III. dient zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω, und zwar innerhalb der Grenzen von log $\omega = 6{,}00$ bis log $\omega \doteq 9{,}000$ oder, in Winkelmass ausgedrückt, von 20″ bis 5° 44′.

Führt man statt sin ω, cos ω, tang ω ihre trigonometrischen Reihen ein, so genügen bei Anwendung von 7-stelligen Logarithmen und für Winkel bis 2° 17′ die beiden ersten Glieder der Reihen 13., erst für Winkel $>$ 2° 17′ haben die 3. Glieder Einfluss. Für den ersten Fall ist daher

$$1)\ \sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{6},$$

$$2)\ \cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}.$$

Dividiert man 1) durch 2), so folgt

$$3)\ \operatorname{tang}\omega = \omega + \frac{\omega^3}{3}.$$

Da bei 1) und 3) die 2. Glieder so klein ausfallen werden, dass dieselben, nach ihrer Multiplication mit der in den Logarithmentafeln in der Spalte *P. P.* aufgeführten logarithmischen Differenz $\delta\omega$, als logarithmische Zuwachse von log ω behandelt werden können, so darf man setzen

$$4)\ \log\sin\omega = \log\omega - \frac{\omega^3}{6}\,\delta\omega,$$

$$5)\ \log\operatorname{tang}\omega = \log\omega + 2\,\frac{\omega^3}{6}\,\delta\omega.$$

Subtrahiert man 4) von 5), so ist

$$6)\ \operatorname{cpl}\log\cos\omega = \left(\frac{\omega^3}{6} + 2\,\frac{\omega^3}{6}\right)\delta\omega = \tfrac{1}{2}\,\omega^3\,\delta\omega,$$

mithin

$$7)\ \log\sin\omega = \log\omega - \tfrac{1}{3}\operatorname{cpl}\log\cos\omega = \log\omega - \tfrac{1}{2}\,(\tau),$$

$$8)\ \log\operatorname{tang}\omega = \log\omega + \tfrac{2}{3}\operatorname{cpl}\log\cos\omega = \log\omega + (\tau).$$

Für Winkel $> 2^\circ\,17'$ genügen bei sin und tang nicht mehr 2 Glieder der trigonometrischen Reihen, es müssen vielmehr noch die 3. Glieder hinzugezogen werden. Darnach erhält man aber nach einer, hier zu weit führenden Entwickelung, wenn man zugleich $\frac{1}{3}$ cpl log cos $\omega = \sigma$ setzt, die beiden innerhalb der Tafelgrenze genauen Gleichungen

$$9)\ \log\sin\omega = \log\omega - \sigma + [0{,}2653]\,\sigma^2 = \log\omega - (\sigma),$$

$$10)\ \log\operatorname{tang}\omega = \log\omega + 2\sigma + [0{,}2653]\,\sigma^2 = \log\omega + (\tau).$$

In diesen Gleichungen bedeutet die in viereckigen Klammern geschriebene Zahl schon den Logarithmus des constanten Factors von σ^2. Diese Bezeichnungsweise wird auch für die Folge beibehalten werden. Unter (σ) und (τ) sind stets die absoluten Werte dieser Grössen zu verstehen.

Entsprechend den Gleichungen 7) bis 10) ist die Tafel III. folgendermassen angeordnet. In der ersten Vertikalspalte ist als Argument log ω auf 2 bezw. 3 Decimalen von 6,00 bis 9,000 und zwar von 8,000 an in Intervallen von 0,001 aufgeführt. Diese Logarithmen sind vollständig, da alle folgenden Mantissenzahlen Null sind. Durch Addition von cpl log sin 1″ = 5,31443 zu dem log ω erhält man die Zahlenwerte von log ω'' in der 2. Vertikalspalte, und durch Addition von log $\sqrt{RN}$ = 6,80502 — dem log des Krümmungsradius für Berlin — zu dem log ω erhält man die Zahlenwerte von log ω^{m} in der dritten Vertikalspalte. Die Logarithmen der 2. und 3. Spalte sind fortlaufend auch nur mit 3 Decimalen aufgeführt, und dieses wird in den meisten Fällen genügen. Erfordert aber die Rechnung eine grössere Schärfe, so sind in den Köpfen beider Spalten auch noch die beiden folgenden Decimalen 43 bezw. 02 gegeben. Die Zahlen der Spalte 3. sind im grunde nur für die Breite von Berlin richtig. Will man die Änderungen der Logarithmen dieser Spalte infolge einer anderen Breite berücksichtigen, so sind den log ω^{m} in 5. Decimale für die verschiedenen Breiten noch folgende Zahlen zu addieren:

φ		φ		φ		φ		φ		φ	
36°	−83	42°	−53	48°	−23	54°	+ 7	60°	+35	66°	+60
38°	−73	44°	−43	50°	−13	56°	+17	62°	+44	68°	+67
40°	−63	46°	−33	52°	− 3	58°	+26	64°	+52	70°	+74

Bei Anwendung der Tafel IA. ist dagegen dem $\log \omega^m$ in 5. Decimale für $\varphi = 50°$ noch — 16, für $\varphi = 52°$ aber — 7 zu addieren.

Die $\log \omega''$ und $\log \omega^m$ der 2. und 3. Spalte dienen, wie die $\log \omega$ der 1. Spalte, gleichfalls als Argumente, und zwar aus dem Grunde, weil vielfach aus vorangehenden Rechnungen $\log \omega''$ oder $\log \omega^m$ schon bekannt ist und unmittelbar in dieser Form in die hier in betracht kommende weitere Berechnung übernommen werden kann.

In der 4. Vertikalspalte stehen die (τ), ausgedrückt in Einheiten der 7. Decimale der Logarithmen. Von $\log \omega = 6{,}00$ bis $\log \omega = 8{,}600$ ist es nicht nötig eine besondere Spalte für (σ) aufzuführen, da innerhalb dieser Grenzen $(\sigma) = \frac{1}{2}(\tau)$ ist. Erst von $\log \omega = 8{,}600$ bis zu Ende der Tafel ist auch für (σ) eine beosndere Spalte vorhanden.

Der Gebrauch der Tafel III. wird durch nachfolgendes Beispiel am deutlichsten erklärt. Aus der Gleichung

$$\sin \psi = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l \sin p \sin f \cdot \left(\frac{N}{R}\right)_f$$

soll ψ'' berechnet werden, wenn f, l'' und p'' aus den vorhergehenden Rechnungen bekannt sind. Nun hat man aber:

Linke Seite der Gleichung:

$$\log \sin \psi = \log \psi'' + \log \sin 1'' - (\sigma)_{\psi''};$$

Rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{cases} \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} l = \log l'' + \log \tfrac{1}{2} \\ \qquad + \log \sin 1'' + (\tau)_{\frac{1}{2} l''}; \\ \log \sin p = \log p'' + \log \sin 1'' - (\sigma)_{p''}; \\ \log \sin f = \log \sin f; \\ \log \left(\frac{N}{R}\right)_f = \log \left(\frac{N}{R}\right)_f. \end{cases}$$

Streicht man nun $\log \sin 1''$ links gegen $\log \sin 1''$ rechts und bringt $(\sigma)_{\psi''}$ auf die rechte Seite, so erhält die gegebene Gleichung folgende Form:

$$\log \psi'' = \log l'' + \log p'' + \log \sin f + \log \left(\tfrac{1}{2} \sin 1'' \left(\frac{N}{R}\right)_f\right) + (\tau)_{\frac{1}{2} l''} - (\sigma)_{p''} + (\sigma)_{\psi''}$$
$$= \log l'' + \log p'' + \log \sin f + (4)_f + (\tau)_{\frac{1}{2} l''} - (\sigma)_{p''} + (\sigma)_{\psi''}.$$

A. Die geographischen Coordinaten.

§. 24. Übertragung der geographischen Coordinaten und des Azimuts vom Punkte P nach dem Punkte P_1 vermittelst der Polarcoordinaten des Punktes P_1, bezogen auf P als Pol, d. h. vermittelst der geodätischen Linie $PP_1 = s$ und ihres Azimutes in P.

Fig. 13. Gegeben ist die Breite φ und die Länge λ des Punktes P, die geodätische Linie $PP_1 = s^m$ und deren Azimut in $P = \angle NPP_1 = \alpha$. Gesucht wird die Breite φ_1 und die Länge λ_1 des Punktes P_1 und das Azimut von s^m in P_1, nämlich $\angle NP_1P = \alpha_1$.

Es sei P_1F senkrecht auf dem Meridian von P, die Breite von F sei f, FF' ein Bogen des Parallelkreises durch F, dessen Radius $= C_1F$, $F'P_1 =$ Breitenunterschied $f - \varphi_1 = \psi$. Die Querkrümmungsradien P_1E und FE dürfen, abgesehen von dem sehr geringen Breitenunterschiede zwischen P_1 und F, umsomehr als in einem Punkte der Axe sich schneidend gedacht werden, als PF' in der Entwickelung als Kreisbogen behandelt wird. Ft ist die Durchschnittslinie der beiden ebenen Schnitte FC_1F' und FEP_1,

$F'q$ senkrecht auf EP_1, QP_1*) sei ein im Punkte P_1 dem Meridian von P paralleler Bogen, d. h. senkrecht auf P_1F, $\angle NP_1Q = \gamma =$ Meridianconvergenz im Punkte P_1, und endlich $\lambda_1 - \lambda = l =$Längenunterschied zwischen P und P_1.

In dem rechtwinklig-sphäroidischen Dreieck PFP_1 sind ausser dem rechten Winkel F noch $\angle P = \alpha$ und Seite $PP_1 = s^m$ gegeben. Gesucht werden der sphäroidische Excess ε — hier identisch mit dem sphärischen — und damit auch $\angle P_1 = 90 - \alpha + \varepsilon$, sowie die Seiten $PF = b''$ und $P_1F = p''$. Zur Berechnung der gesuchten Stücke werden die aus der Tafel I. zu entnehmenden Logarithmen (3), (1) und (2) benutzt; es sind daher zuerst deren Argumente zu bestimmen, nämlich für (3) die Breite $\frac{1}{3}(\varphi + \varphi_1 + f)$, für (1) die Breite $\frac{1}{2}(\varphi + f)$, wofür auch bei (3) mit hinlänglicher Genauigkeit $\varphi + \frac{2}{3} b'$ und bei (1) $\varphi + \frac{1}{2} b' - b$ in Minuten ausgedrückt — gesetzt werden kann. Das dritte Argument f für (2) ergiebt sich im Verlaufe der Entwickelung als Breite des Punktes F noch vor seiner Anwendung als Argument. Bei der Berechnung der Argumente für (3) und (1) mit fünfstelligen Logarithmen werden die am Ende der Tafel I. in Spalte (7) zusammengestellten Tafelwerte mit Argument φ verwendet, und hierbei sowohl als auch bei der Berechnung des sphärischen Excesses das Azimut α als $\angle P$ unmittelbar eingeführt. Hiernach hat man aus der für die Berechnung der Argumente hinlänglich genauen Gleichung

$$b^m = s^m \cos \alpha$$

die beiden logarithmischen Werte

$$\left.\begin{aligned} \log \tfrac{2}{3} b' &= \log (s^m \cos \alpha) + \log \left(\frac{2}{3 R \sin 1'}\right) = \log (s^m \cos \alpha) + (7)\varphi, \\ \log \tfrac{1}{2} b' &= \log \tfrac{2}{3} b' + 9{,}87506 - 10 \end{aligned}\right\} \quad (47.)$$

und damit die Argumente für (3) und (1) nämlich:

$$\tfrac{1}{3}(\varphi + \varphi_1 + f) = \varphi + \tfrac{2}{3} b'; \quad \tfrac{1}{2}(\varphi + f) = \varphi + \tfrac{1}{2} b'. \qquad (47a.)$$

Der sphärische Excess des Dreiecks PFP_1 ist nach (43.) des zweiten Abschnittes

$$\varepsilon'' = s^{m2} \cos \alpha \sin \alpha \cdot \frac{1}{2 RN \sin 1''} \qquad (43.)$$

oder in Logarithmen

$$\log \varepsilon'' = \log (s^{m2} \cos \alpha \sin \alpha) + (3)_{\varphi\varphi_1 f}. \qquad (43a.)$$

Die weitere Auflösung des Dreiecks PFP_1 geschieht nach Legendres Theorem — vergl. §. 5. —. Darnach sind die drei Winkel des entsprechenden ebenen Dreiecks $\angle P = \alpha - \frac{1}{3}\varepsilon$, $F = 90° - \frac{1}{3}\varepsilon$, $P_1 = 90° - (\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)$, und man erhält für die Seite PF

$$\left.\begin{aligned} b^m &= \frac{s^m \cos(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon}, \\ b'' &= \frac{s^m \cos(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon} \cdot \frac{1}{R \sin 1''} = b^m \cdot \frac{1}{R \sin 1''}. \end{aligned}\right\} \quad (48.)$$

Bei der Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen ist bei der Kleinheit des Excesses cpl log cos $\frac{1}{3}\varepsilon = 0{,}0000000$. Bei $\varepsilon = 5'$ ist cpl log cos $\frac{1}{3}\varepsilon$ erst 0,0000001. Für Dreiecke mit einem Excesse von $5'$ genügen aber weder die hier angewendeten Formeln noch sieben- oder selbst achtstellige Logarithmen, überhaupt liegt die Behandlung so grosser Dreiecke ausserhalb des Rahmens der hier gestellten Aufgaben.

---

*) Das Bogenstück QP_1 liegt in Wirklichkeit hinter der Bildfläche und ist nur zur Veranschaulichung in die Höhe gehoben; seine Verlängerung über P_1 ist dagegen sichtbar.

Das Glied cpl log cos $\frac{1}{3}\varepsilon$ kann daher hier stets unberücksichtigt bleiben, und man hat

$$\log b'' = \log (s^{\mathrm{m}} \cos (\alpha - \tfrac{2}{3}\varepsilon)) + \mathrm{cpl}\ (1)_{\varphi f} = \log b^{\mathrm{m}} + \mathrm{cpl}\ (1)_{\varphi f}. \qquad \textbf{(48a.)}$$

Hiernach folgt alsdann

$$f = \varphi + b''. \qquad \textbf{(49.)}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} p^{\mathrm{m}} &= \frac{s^{\mathrm{m}} \sin (\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon}, \\ p'' &= \frac{s^{\mathrm{m}} \sin (\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon} \cdot \frac{1}{N \sin 1''} = p^{\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{N \sin 1''}; \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(50.)}$$

$$\log p'' = \log (s^{\mathrm{m}} \sin (\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon)) + \mathrm{cpl}\ (2)_f = \log p^{\mathrm{m}} + \mathrm{cpl}\ (2)_f. \qquad \textbf{(50a.)}$$

In dem rechtwinklig-sphärischen Dreiecke NP_1F ist $NF = 90° - f$, $NP_1 = 90° - \varphi_1$, $P_1F = \frac{p^{\mathrm{m}}}{N} = p$ — Bogen für den Radius als Einheit —, $\angle NFP_1 = 90°$, $\angle P_1NF = l$. Da ferner QP_1 senkrecht auf P_1F und $\angle NP_1Q = \gamma$ ist, so wird $\angle FP_1N = 90° - \gamma$. Nach 22. des ersten Abschnittes ist

$$\operatorname{tang} l = \frac{\operatorname{tang} p}{\cos f}, \qquad \textbf{(51.)}$$

und mit Benutzung der aus (49.) und (50.) bekannten Grössen f und p'', sowie der Additamente der Tafel III., da l'' und p'' kleine Winkel sind,

$$\log \operatorname{tang} l = \log l'' + \log \sin 1'' + (\tau)_{l''} = \log p'' + \log \sin 1'' + (\tau)_{p''} + \mathrm{cpl} \log \cos f,$$

oder geordnet

$$\log l'' = \log p'' + \mathrm{cpl} \log \cos f + (\tau)_{p''} - (\tau)_{l''}, \qquad \textbf{(51a.)}$$

und schliesslich

$$\lambda_1 = \lambda + l''. \qquad \textbf{(52.)}$$

Ferner erhält man nach 21.

$$\sin \gamma = \operatorname{tang} p \operatorname{tang} \varphi_1, \qquad \textbf{(53.)}$$

nach 23. aber

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} l \sin \varphi_1. \qquad \textbf{(54.)}$$

Die logarithmische Berechnung ergiebt aus (53.)

$$\log \sin \gamma = \log \gamma'' + \log \sin 1'' - (\sigma)_{\gamma''} = \log p'' + \log \sin 1'' + (\tau)_{p''} + \log \operatorname{tang} \varphi_1$$

oder geordnet

$$\log \gamma'' = \log p'' + \log \operatorname{tang} \varphi_1 + (\tau)_{p''} + (\sigma)_{\gamma''}. \qquad \textbf{(53a.)}$$

Aus (54.) erhält man

$$\log \operatorname{tang} \gamma = \log \gamma'' + \log \sin 1'' + (\tau)_{\gamma''} = \log l'' + \log \sin 1'' + (\tau)_{l''} + \log \sin \varphi_1,$$

d. h.

$$\log \gamma'' = \log l'' + \log \sin \varphi_1 + (\tau)_{l''} - (\tau)_{\gamma''}.$$

Bis 2° 17′ ist $(\tau)_\omega = -\frac{2}{3} \log \cos \omega$, nach (20.) ist $\log \cos p = \log \cos l - \log \cos \gamma$, daher $(\tau)_{p''} = (\tau)_{l''} - (\tau)_{\gamma''}$, so dass innerhalb des genannten Grenzwertes

$$\log \gamma'' = \log l'' + \log \sin \varphi_1 + (\tau)_{p''}. \qquad \textbf{(54a.)}$$

Auf diese Formeln (53.) bis (54a.) wird weiter unten nach Bestimmung der Breite φ_1 zurückgekommen werden.

Da FF' ein Bogen des Parallelkreises von F ist, dessen Breite f ist, so wird das Meridianbogenstück P_1F' der Breitenunterschied zwischen P_1 und F, d. h.

$$\psi = f - \varphi_1 \qquad (55.)$$

sein, oder mit Benutzung von (49.)

$$\varphi_1 = \varphi + b'' - \psi. \qquad (55a.)$$

Aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke EC_1t und $F'qt$ folgt

$$F'q = \frac{EC_1 \cdot F't}{Et} = EC_1 \cdot F't \cdot \frac{1}{Et}.$$

Da $F'q$ senkrecht auf dem Krümmungsradius R des Meridianbogenstückes $P_1F' = \psi$ im Punkte P_1 ist, so wird sein . . . . $F'q = R \sin \psi$.
Aus Dreieck EC_1F ist nach (3.) und (4.) $C_1F = C_1F' =$
$N \cos f$ und . . . . $EC_1 = N \sin f$.
Da Ft Tangente an FP_1 und daher senkrecht auf EF und C_1F ist, so folgt aus Dreieck C_1tF

$$C_1t = \frac{C_1F}{\cos tC_1F} = \frac{N \cos f}{\cos l}.$$

Ferner ist $F't = C_1t - C_1F' = N \cos f \left(\frac{1}{\cos l} - 1\right)$, d. h. $F't = \frac{2\, N \cos f \sin^2 \frac{1}{2} l}{\cos l}$.

Aus Dreieck EC_1t ergiebt sich ferner

$$Et = \frac{C_1t}{\sin C_1Et} = \frac{N \cos f}{\cos l \cos (f - \psi)}$$

und aus Dreieck NP_1F nach 17. im ersten Abschnitte

$$\sin NP_1 = \frac{\sin P_1F}{\sin P_1NF}, \text{ d. h. } \cos (f - \psi) = \frac{\sin p}{\sin l},$$

und hiernach . . . . $\frac{1}{Et} = \frac{\cos l \sin p}{N \cos f \sin l}$.
Setzt man nun in die obige Gleichung

$$F'q = EC_1 \cdot F't \cdot \frac{1}{Et}$$

die eben gefundenen Ausdrücke ein, so hat man

$$R \sin \psi = N \sin f \cdot \frac{2\, N \cos f \sin^2 \frac{1}{2} l}{\cos l} \cdot \frac{\cos l \sin p}{N \cos f \sin l}.$$

Führt man $2 \sin \frac{1}{2} l \cos \frac{1}{2} l$ für $\sin l$ im Nenner des dritten Factors ein, hebt die Factoren im Zähler gegen die gleichen im Nenner auf und ordnet die ganze Gleichung, so ergiebt sich schliesslich

$$\sin \psi = \text{tang } \tfrac{1}{2} l \sin p \sin f \cdot \frac{N}{R}. \qquad (56.)$$

Auch hier wird man für die logarithmische Berechnung von ψ in derselben Weise wie mit (51.), (53.) und (54.) verfahren; man hat hiernach

$$\log \sin \psi = \log \psi'' + \log \sin 1'' - (\sigma)_{\psi''} = \log l'' + \log \tfrac{1}{2} \sin 1'' + (\tau)_{\frac{1}{2} l''}$$
$$+ \log p'' + \log \sin 1'' - (\sigma)_{p''} + \log \sin f + \log \frac{N}{R}.$$

Hebt man nun gegenseitig auf, fasst die constanten Glieder mit $\log \frac{N}{R}$ zusammen, und berücksichtigt, dass für den vorliegenden Zweck $(\tau)_{\frac{1}{2} l''} = \frac{1}{4} (\tau)_{l''}$ ist, und $(\sigma)_{\psi''} = 0$ gesetzt werden darf, so hat man — da die mittlere Breite von $\psi = \frac{\varphi_1 + f}{2}$ ist —

$$\log \psi'' = \log l'' + \log p'' + \log \sin f + (4)_{\varphi_1 f} + \tfrac{1}{4} (\tau)_{l''} - (\sigma)_{p''}. \qquad (56a.)$$

Hierin darf man aber als Argument für (4), unbeschadet der Genauigkeit, f für $\frac{1}{2}(\varphi_1 + f)$ setzen. Führt man das gefundene ψ'' in die Gleichungen (55.) und (55a.) ein, so ist die Breite φ_1 des Punktes P_1 vollständig bestimmt.

Setzt man aus Gleichung (51a.) den Wert von log p'' in die Gleichung (56a.) ein und berücksichtigt, dass bei Anwendung von 5-stelligen Logarithmen die Additamente keinen Einfluss mehr haben, und man bis zu 30′ bezw. 1° 30′ Längenunterschied doch noch für ψ'' die 4. bezw. 3. Decimale genau erhält, so kann man in den meisten Fällen folgende einfache Formel für log ψ'' anwenden

$$\left.\begin{aligned} \log \psi'' &= \log \frac{l''^2\, N \sin 1'' \sin f \cos f}{2\,R} = \log \frac{l''^2\, N \sin 1'' \sin 2f}{4\,R} \\ \text{oder} \quad \log \psi'' &= \log l''^2 + (5)_f. \end{aligned}\right\} \quad (56b.)$$

Da alle Meridiane in den Polen zusammentreffen, so wird zwischen den Meridianen zweier Punkte P und P_1 eine Convergenz stattfinden, und zwar wird diese am Äquator Null sein, mit der Breite aber zunehmen und am Pole $= \lambda_1 - \lambda = l$ werden. Diese Meridianconvergenz wird durch den bereits erwähnten Winkel $NP_1Q = \gamma$ dargestellt, für welchen die Gleichungen (53.) bis (54a.) gegeben sind, und der nunmehr nach der Bestimmung von φ_1 numerisch berechnet werden kann.

Das Azimut von $P_1P = s^m$ auf P_1 entspricht dem convexen Winkel $NP_1P = \alpha_1$, und kann in folgender Weise bestimmt werden. Da, wie schon oben gezeigt, der concave $\angle\, FP_1Q = 90°$, so wird der convexe Winkel $QP_1F = 270°$. Zieht man von letzterem den Winkel $PP_1F = 90° - \alpha + \varepsilon$ ab, fügt dagegen $\angle\, NP_1Q = \gamma$ hinzu, so erhält man den convexen Winkel NP_1P, d. h. das Azimut auf P_1 nach P; es ist daher

$$\alpha_1 = 270° - 90° + \alpha - \varepsilon + \gamma = 180° + \alpha + \gamma - \varepsilon. \quad (57.)$$

Fasst man die Resultate der vorstehenden Entwickelungen zusammen, so erhält man als Auflösung der gestellten Aufgabe die hier folgenden Gleichungen.

1. Argumentenbestimmung.

$$\log \tfrac{2}{3} b' = \log (s^m \cos \alpha) + (7)_\varphi;\ \log \tfrac{1}{2} b' = \log \tfrac{2}{3} b' + 9{,}87506 - 10; \quad (47.)$$

$$\tfrac{1}{3}(\varphi + \varphi_1 + f) = \varphi + \tfrac{2}{3} b'; \qquad \tfrac{1}{2}(\varphi + f) = \varphi + \tfrac{1}{2} b'. \quad (47a.)$$

2. Der sphärische Excess des Dreiecks PFP_1.

$$\varepsilon'' = (s^{m2} \cos \alpha \sin \alpha) \cdot \frac{1}{2\,RN \sin 1''}; \quad (43.)$$

$$\log \varepsilon'' = \log (s^{m2} \cos \alpha \sin \alpha) + (3)_{\varphi\varphi_1 f}. \quad (43a.)$$

3. Der Breitenunterschied zwischen P und F in Secunden.

$$b'' = \frac{s^m \cos (\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}\varepsilon} \cdot \frac{1}{R \sin 1''}; \quad (48.)$$

$$\log b'' = \log (s^m \cos (\alpha - \tfrac{2}{3}\varepsilon)) + \text{cpl } (1)_{\varphi f}. \quad (48a.)$$

4. Die Breite f des Fusspunktes F des Perpendikels P_1F.

$$f = \varphi + b''. \quad (49.)$$

5. Das Perpendikel $P_1F = p''$ und der Längenunterschied l'' zwischen P und P_1.

$$p'' = \frac{s^m \sin (\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)}{\cos \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{N \sin 1''}. \quad (50.)$$

$$\log p'' = \log (s^m \sin (\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon)) + \text{cpl } (2)_f. \quad (50a.)$$

$$\tang l = \frac{\tang p}{\cos f}; \tag{51.}$$

$$\log l'' = \log p'' + \text{cpl} \log \cos f + (\tau)_{p''} - (\tau)_{l''}. \tag{51a.}$$

6. Die Länge λ_1 des Punktes P_1.

$$\lambda_1 = \lambda + l''. \tag{52.}$$

7. Der Breitenunterschied ψ'' zwischen P_1 und F.

$$\sin \psi = \tang \tfrac{1}{2} l \sin p \sin f \cdot \frac{N}{R}. \tag{56.}$$

$$\log \psi'' = \log l'' + \log p'' + \log \sin f + (4)_f + \tfrac{1}{4} (\tau)_{l''} - (\sigma)_{p''} \tag{56a.}$$

oder für $\psi'' < 10''$:

$$\log \psi'' = \log l''^2 + (5)_f. \tag{56b.}$$

8. Die Breite φ_1 des Punktes P_1.

$$\varphi_1 = \varphi + b'' - \psi'' = f - \psi''. \tag{55.), (55a.}$$

9. Die Meridianconvergenz γ'' im Punkte P_1 gegen den Meridian von P.

$$\sin \gamma = \tang p \tang \varphi_1, \tag{53.}$$

oder

$$\tang \gamma = \tang l \sin \varphi_1, \tag{54.}$$

$$\log \gamma'' = \log p'' + \log \tang \varphi_1 + (\tau)_{p''} + (\sigma)_{\gamma''}, \tag{53a.}$$

oder

$$\log \gamma'' = \log l'' + \log \sin \varphi_1 + (\tau)_{p''}. \tag{54a.}$$

10. Das Azimut α_1 auf P_1 nach P.

$$\alpha_1 = 180 + \alpha + \gamma - \varepsilon. \tag{57.}$$

Die vorstehenden Formeln sind, wie auch die Figur 13. zeigt, für den Fall entwickelt, dass das gegebene Azimut α im 1. Quadranten, d. h. zwischen 0° und 90° liegt. Dieselben sind aber allgemein für alle vier Quadranten gültig; man hat nur streng auf die Vorzeichen zu achten, welche für jeden speciellen Fall sin α und cos α und danach auch den übrigen Berechnungsgrössen zukommen. s wird als geodätische Linie stets positiv sein.

Für die Praxis dürfte es zweckmässig sein, bei der Berechnung die Vorzeichen von sin α und cos α ausser acht zu lassen, überhaupt nur mit absoluten Zahlen zu operieren. Zu diesem Zwecke wird man die Winkel des Dreiecks PFP_1 bilden und zwar für $\angle P = A$, $\angle P_1 = B$, $\angle F = 90°$, für die Winkel des entsprechenden ebenen Dreiecks aber $A' = A - \frac{1}{3}\varepsilon$, $B' = B - \frac{1}{3}\varepsilon$ einführen, so dass man in (48.) und (48a.) sin B' statt cos $(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon)$, in (50.) und (50a.) sin A' statt sin $(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon)$ zu setzen hat. Die Zusammenstellungen der Rechnungsergebnisse geschieht schliesslich nach der hier folgenden Schablone, wobei das Azimut α als Argument dient.

α	A	B	b	p	α_1
0° 90°	α	$90 - \alpha + \varepsilon$	+	+	$180 + \alpha + \gamma - \varepsilon$
180°	$180 - \alpha$	$\alpha - 90 + \varepsilon$	—	+	$+ \gamma + \varepsilon$
270°	$\alpha - 180$	$270 - \alpha + \varepsilon$	—	—	$- \gamma - \varepsilon$
360°	$360 - \alpha$	$\alpha - 270 + \varepsilon$	+	—	$- \gamma + \varepsilon$

Um einen Vergleich zu haben zwischen der Genauigkeit der vorstehenden Formeln und der dabei anzuwendenden Tafeln mit den von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme als Rechnungsvorschriften zusammengestellten „Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten. Erste Ordnung. Berlin 1878“, sind nachstehend dieselben für die Genauigkeit der Berechnung ungünstigsten Beispiele gewählt, welche auch in den Rechnungsvorschriften zwischen den Punkten D, E und F, in unserm Beispiele mit P, P_2, P_1 bezeichnet, berechnet wurden. Gegeben sind die geographischen Coordinaten von P: $\varphi = 57°$, $\lambda = 31°$, die geodätische Linie zwischen P und P_1: $s = 120$ Kilometer und deren Azimut: $\alpha = 135°$ in P nach P_1. Der Halbierungspunkt der geodätischen Linie sei P_2. Gesucht werden die geographischen Coordinaten von P_1 und das Azimut α_1 in P_1 nach P. Geführt werden die sich controllierenden Berechnungen in der Weise, dass einmal direct von P nach P_1, das andere Mal von P nach P_2 und dann von P_2 nach P_1 vorgegangen wird.

Siehe die Beispiele 1., 2. und 3. auf den Seiten 79, 80 und 81.

Die Vergleichung der direct von P nach P_1 und der von P über P_2 als Zwischenstation nach P_1 in den Beispielen 1. bis 3. geführten Berechnungen geben in den Resultaten für φ_1, λ_1 und α_1 vollständige Übereinstimmung. Die Vergleichung derselben Beispiele in den Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme ergeben unter sich eine Übereinstimmung bis auf eine Differenz von einer Einheit in den letzten Decimalen der Secunden bei φ_1, λ_1 und α_1, wogegen die Vergleichung des Beispiels 1. — direct von P nach P_1 — mit der Berechnung des Beispieles 7. der Landesaufnahme nur eine Differenz von 0,″0001 bei φ_1 ergiebt.

Eine strengere Prüfung über die Genauigkeit der Formeln erhält man aber dadurch, dass man den Punkt P_2 nicht in die Mitte der Linie PP_1, überhaupt nicht in dieselbe legt, sondern P_2 zum 3. Eckpunkt eines Dreiecks PP_1P_2 macht und nun von P über P_1 und P_2 wieder nach P zurückrechnet. Ein hierauf bezügliches Dreieck ist mit Beibehaltung der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$, ihres Azimuts α in P und der geographischen Coordinaten φ und λ das folgende:

		log s
$\angle P$	$= 30°$;	4,7909509.4.
$\angle P_1$	$= 73°\ 51'\ 26{,}''645$;	5,0745294.2.
$\angle P_2$	$= 76°\ 8'\ 51{,}''370$;	5,0791812.5.

Hieraus erhält man:

$\varphi = 57°\ 0'\ 0''$	$\lambda = 31°\ 0'\ 0''$	$\alpha = 135°\ 0'\ 0''$
$b - \psi = -\ 46'\ 10{,}''9781$	$l = +1°\ 22'\ 6{,}''0327$	$108 + \gamma - \varepsilon = 181°\ 8'\ 33{,}''355$
$\varphi_1 = 56°\ 13'\ 49{,}''0219$	$\lambda_1 = 32°\ 22'\ 6{,}''0327$	$\alpha_1 = 316°\ 8'\ 33{,}''355$
$b_1 - \psi_1 = +\ 28'\ 46{,}''7234$	$l_1 = +\ 30'\ 16{,}''3963$	$\angle P_1 = 73°\ 51'\ 26{,}''645$
$\varphi_2 = 56°\ 42'\ 35{,}''7453$	$\lambda_2 = 32°\ 52'\ 22{,}''4290$	$\alpha_1' = 30°\ 0'\ 0''$
$b_2 - \psi_2 = +\ 17'\ 24{,}''2547$	$l_2 = -1°\ 52'\ 22{,}''4290$	$180 + \gamma_1 - \varepsilon_1 = 180°\ 25'\ 14{,}''160$
$\varphi = 57°\ 0'\ 0''$	$\lambda = 31°\ 0'\ 0''$	$\alpha_2 = 210°\ 25'\ 14{,}''160$
		$\angle P_2 = 76°\ 8'\ 51{,}''370$
		$\alpha_2' = 286°\ 34'\ 5{,}''530$
		$180 + \gamma_2 - \varepsilon_2 = 178°\ 25'\ 54{,}''471$
		$\alpha' = 105°\ 0'\ 0{,}''001$
		$\angle P = 30°\ 0'\ 0''$
		$\alpha = 135°\ 0'\ 0{,}''001$

Die Berechnung ergiebt daher bei φ und λ volltändige Üebereinstimmung, bei α eine Differenz von 0,″001.

Bei Anwendung von nur 8-stelligen Logarithmen, und von Numeri von 8 und mehr Ziffern würden auch grössere Differenzen nicht in der geringern Schärfe der Formeln, sondern in der Unsicherheit der letzten Stelle und in den Abrundungen

(Fortsetzung des Textes auf Seite 83.)

1. Directe Übertragung der geographischen Coordinaten von P nach P_1 vermittelst der Polarcoordinaten von P_1, bezogen auf P als Pol und die Nordrichtung des Meridians von P als Anfangsrichtung.

Gegeben in P: $\log s = 5{,}0791812.5$;	$\varphi = 57°$;	$\lambda = 31°$;	$\alpha = 135°$.
Gesucht in P_1:	φ_1;	λ_1;	α_1.

1.

$\log s = 5{,}07918$
$\log \cos \alpha = 9{,}84949\,n$
$(7)_\varphi = 6{,}55538$
$\log \tfrac{2}{3}\, b' = 1{,}48405\,n$
$\log \tfrac{3}{4} = 9{,}87506$
$\log \tfrac{1}{2}\, b' = 1{,}35911\,n$
$\varphi + \tfrac{2}{3}\, b' = 56°\ 29',5$
$\varphi + \tfrac{1}{2}\, b' = 56°\ 37',138$

2.

$\log s^2 = 10{,}15836$
$\log \cos \alpha = 9{,}84949\,n$
$\log \sin \alpha = 9{,}84949$
$(3)_{\varphi\varphi_1 f} = 1{,}40298$
$\log \varepsilon'' = 1{,}26032\,n$
$\varepsilon'' = -18,''210$

3.

$\log s = 5{,}0791812.5$
$\text{l.}\cos(\alpha - \tfrac{2}{3}\varepsilon) = 9{,}8495105.6\,n$
$\text{cpl}\,(1)_{\varphi f} = 8{,}5096512.3$
$\log b'' = 3{,}4383430.4\,n$
$b'' = -2743,''7406$

5.

$\log s = 5{,}0791812.5$
$\text{l.}\sin(\alpha - \tfrac{1}{3}\varepsilon) = 9{,}8494722.2$
$\text{cpl}\,(2)_f = 8{,}5087776.6$
$\log p'' = 3{,}4374311.3$
$\text{cpl}\log\cos f = 0{,}2551232.3$
$(\tau)_{p''} - (\tau)_{l''} = -\ 570.7$
$\log l'' = 3{,}6924972.9$
$l'' = 4926,''0327$

9.

$\log l'' = 3{,}6924972.9$
$\log \sin \varphi_1 = 9{,}9197464.9$
$(\tau)_{p''} = 255.1$
$\log \gamma'' = 3{,}6122692.9$
$\gamma'' = 4095,''145$

7.

$\log p''l'' = 7{,}1299284$
$\log \sin f = 9{,}9197848$
$(4)_f = 4{,}3854452$
$\tfrac{1}{4}(\tau)_{l''} - (\sigma)_{p''} = 79$
$\log \psi'' = 1{,}4351663$

4. 8.

$\varphi = 57°\ 0'\ 0''$
$b = -0°\ 45'\ 4,''37406$
$f = 56°\ 14'\ 16,''2594$
$-\psi'' = -\ 27,''2375$
$\varphi_1 = 56°\ 13'\ 49,''0219$

6.

$\lambda = 31°\ 0'\ 0''$
$l = 1°\ 22'\ 6,''0327$
$\lambda_1 = 32°\ 22'\ 6,''0327$

10.

$180 + \alpha = 315°\ 0'\ 0''$
$\gamma - \varepsilon = 1°\ 8'\ 33,''355$
$\alpha_1 = 316°\ 8'\ 33,''355$

2. Übertragung von P nach P_2.

Gegeben in P: $\log s_1 = 4{,}7781512.5$; $\varphi = 57$; $\lambda = 31°$; $\alpha = 135°$.

Gesucht in P_2: φ_2; λ_2; α_2.

1.

$\log s_1 = 4{,}77815$
$\log \cos \alpha = 9{,}84949\,n$
$(7)_\varphi = 6{,}55538$
$\log \frac{2}{3}\, b' = 1{,}18302\,n$
$\log \frac{3}{4} = 9{,}87506$
$\log \frac{1}{2}\, b' = 1{,}05808\,n$
$\varphi + \frac{2}{3}\, b' = 56°\, 44',8$
$\varphi + \frac{1}{2}\, b' = 56°\, 48',569$

2.

$\log s_1^2 = 9{,}55630$
$\log \cos \alpha = 9{,}84949\,n$
$\log \sin \alpha = 9{,}84949$
$(3)_{\varphi\varphi_2 f} = 1{,}40295$
$\log \varepsilon'' = 0{,}65823\,n$
$\varepsilon'' = -4,''552$

3.

$\log s_1 = 4{,}7781512.5$
$\mathrm{l.}\cos(\alpha - \frac{2}{3}\varepsilon) = 9{,}8494913.9\,n$
$\mathrm{cpl}\,(1)_{\varphi f} = 8{,}5096379.0$
$\log b'' = 3{,}1372805.4\,n$
$b'' = -1371,''7676$

4. 8.

$\varphi = 57°\ 0'\ 0''$
$b = -0°\ 22'\ 51,''7676$
$f = 56°\ 37'\ 8,''2324$
$-\psi'' = -\ \ 6,''9087$
$\varphi_2 = 56°\ 37'\ 1,''3237$

5.

$\log s_1 = 4{,}7781512.5$
$\mathrm{l.}\sin(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon) = 9{,}8494818.1$
$\mathrm{cpl}\,(2)_f = 8{,}5087687.4$
$\log p'' = 3{,}1364018.0$
$\mathrm{cpl}\,\log\cos f = 0{,}2594758.4$
$(\tau)_{p''} - (\tau)_{l''} = -\ \ 146.8$
$\log l'' = 3{,}3958629.6$
$l'' = 2188,''0721$

6.

$\lambda = 31°\ 0'\ 0''$
$l = 0°\ 41'\ 28,''0721$
$\lambda_2 = 31°\ 41'\ 28,''0721$

7.

$\log p''l'' = 6{,}5322648$
$\log \sin f = 9{,}9217020$
$(4)_f = 4{,}3854274$
$\frac{1}{4}(\tau)_{l''} - (\sigma)_{p''} = 21$
$\log \psi'' = 0{,}8393963$

9.

$\log l'' = 3{,}3958629.6$
$\log \sin \varphi_2 = 9{,}9216924.4$
$(\tau)_{p''} = 63.8$
$\log \gamma'' = 3{,}3175617.8$
$\gamma'' = 2077,''599$

10.

$180 + \alpha = 315°\ 0'\ 0''$
$\gamma - \varepsilon = 0°\ 34'\ 42,''151$
$\alpha_2 = 315°\ 34'\ 42,''151$

3. Übertragung von P_2 nach P_1.

Gegeben in P_2: $\log s_2^m = 4{,}7781512.5$; $\varphi_2 = 56^\circ\ 37'\ 1,''3237$; $\lambda_2 = 31^\circ\ 41'\ 28,''0721$; $\alpha_2 = 135^\circ\ 34'\ 42,''151$.

Gesucht in P_1: φ_1; λ_1; α_1.

1.

$\log s_2^m = 4{,}77815$

$\log \cos \alpha_2 = 9{,}85382n$

$(7)\varphi_2 = 6{,}55541$

$\log \frac{2}{3} b' = 1{,}18738n$

$\log \frac{3}{4} = 9{,}87506$

$\log \frac{1}{2} b' = 1{,}06244n$

$\varphi_2 + \frac{2}{3} b' = 56^\circ\ 21',6$

$\varphi_2 + \frac{1}{2} b' = 56^\circ\ 25',476$

2.

$\log s_2^{m2} = 9{,}55630$

$\log \cos \alpha_2 = 9{,}85382n$

$\log \sin \alpha_2 = 9{,}84506$

$(3)\varphi_2\varphi_1 f = 1{,}40299$

$\log \varepsilon'' = 0{,}65817n$

$\varepsilon'' = -4,''551$

3.

$\log s_2^m = 4{,}7781512.5$

$\mathrm{l.}\cos(\alpha_2 - \frac{2}{3}\varepsilon) = 9{,}8538313.1n$

$\mathrm{cpl}\ (1)\varphi_2 f = 8{,}5096648.7$

$\log b'' = 3{,}1416474.3n$

$b'' = -1385,''6305$

4. 8.

$\varphi_2 = 56^\circ\ 37'\ 1,''3237$

$b = -0^\circ\ 23'\ 5,''6305$

$f = 56^\circ\ 13'\ 55,''6932$

$-\psi'' = -\ 6,''6713$

$\varphi_1 = 56^\circ\ 13'\ 49,''0219$

5.

$\log s_2^m = 4{,}7781512.5$

$\mathrm{l.}\sin(\alpha_2 - \frac{1}{3}\varepsilon) = 9{,}8450531.7$

$\mathrm{cpl}\ (2)_f = 8{,}5087777.9$

$\log p'' = 3{,}1319822.1$

$\mathrm{cpl} \log \cos f = 0{,}2550584.6$

$(\tau)_{p''} - (\tau)_{l''} = -\ 139.8$

$\log l'' = 3{,}3870266.9$

$l'' = 2437,''9606$

6.

$\lambda_2 = 31^\circ\ 41'\ 28,''0721$

$l = 0^\circ\ 40'\ 37,''9606$

$\lambda_1 = 32^\circ\ 22'\ 6,''0327$

7.

$\log p''l'' = 6{,}5190089$

$\log \sin f = 9{,}9197559$

$(4)_f = 4{,}3854455$

$\frac{1}{4}(\tau)_{l''} - (\sigma)_{p''} = 19$

$\log \psi'' = 0{,}8242122$

9.

$\log l'' = 3{,}3870266.9$

$\log \sin \varphi_1 = 9{,}9197464.9$

$(\tau)_{p''} = 62.5$

$\log \gamma'' = 3{,}3067794.3$

$\gamma'' = 2026,''653$

10.

$180 + \alpha_2 = 315^\circ 34'\ 42,''151$

$\gamma - \varepsilon = 0^\circ\ 33'\ 51,''204$

$\alpha_1 = 316^\circ\ 8'\ 33,''355$

4. Übertragung der geographischen Coordinaten von P, Müggelsberg, nach P_1, Colberg. Die Berechnung ist mit absoluten Zahlenwerten unter Benutzung der Schablone auf Seite 77 ausgeführt.

Gegeben in P: $\log s^m = 4{,}3762243$; $\varphi = 52^\circ\ 25'\ 7{,}''1338$; $\lambda = 31^\circ\ 17'\ 37{,}''9332$; $\alpha = 146^\circ\ 37'\ 1{,}''05$.

Gesucht in P_1: φ_1; λ_1; α_1.

1.

$\log s^m = 4{,}37622$
$\log \cos \alpha = 9{,}92169$
$(7)_\varphi = \underline{6{,}55571}$
$\log \tfrac{3}{8}\, b' = 0{,}85362$
$\log \tfrac{3}{4} = \underline{9{,}87506}$
$\log \tfrac{1}{2}\, b' = 0{,}72868$
$\varphi - \tfrac{3}{8}\, b' = 52^\circ\ 18{,}'0$
$\varphi - \tfrac{1}{2}\, b' = 52^\circ\ 19{,}'765$

2.

$\log s^{m2} = 8{,}75245$
$\log \cos \alpha = 9{,}92169$
$\log \sin \alpha = 9{,}74055$
$(3)\varphi\varphi_1 f = \underline{1{,}40338}$
$\log \varepsilon'' = 9{,}81807$
$\varepsilon'' = 0{,}''658$

3.

$\log s^m = 4{,}3762243$
$\log \sin B' = 9{,}9216927$
$\text{cpl}\ (1)_{\varphi f} = \underline{8{,}5099602}$
$\log b'' = 2{,}8078772$
$b'' = -642{,}''5060$

5.

$\log s^m = 4{,}3762243$
$\log \sin A' = 9{,}7405464$
$\text{cpl}\ (2)_f = \underline{8{,}5088739}$
$\log p'' = 2{,}6256446$
$\text{cpl} \log \cos f = 0{,}2129982$
$(\tau)_{p''} - (\tau)_{l''} = \underline{-\ \ 10}$
$\log l'' = 2{,}8386418$
$l'' = 689{,}''6708$

9.

$\log l'' = 2{,}8386418$
$\log \sin \varphi_1 = 9{,}8979474$
$(\tau)_{p''} = \underline{\ \ 6}$
$\log \gamma'' = 2{,}7365898$
$\gamma'' = 545{,}''243$

2a.

$\Delta\ PP_1F.$

$P : A = 33^\circ\ 22'\ 58{,}''95$	$58{,}''73 = A'$
$P_1 : B = 56^\circ\ 37'\ 1{,}''71$	$1{,}''49 = B'$
$F = 89^\circ\ 59'\ 60'',00$	$59{,}''78 = F'$
$180^\circ\ 0'\ 0{,}''66$	$0{,}''00$

7.

$\log l''^2 = 5{,}67728$
$(5)_f = \underline{4{,}07059}$
$\log \psi'' = 9{,}74787$

4. 8.

$\varphi = 52^\circ\ 25'\ 7{,}''1338$
$b = \underline{-\ 10'\ 42{,}''5060}$
$f = 52^\circ\ 14'\ 24{,}''6278$
$-\psi'' = \underline{-\ \ 0{,}''5596}$
$\varphi_1 = 52^\circ\ 14'\ 24{,}''0682$

6.

$\lambda = 31^\circ\ 17'\ 37{,}''9332$
$l = \underline{11'\ 29{,}''6708}$
$\lambda_1 = 31^\circ\ 29'\ 7{,}''6040$

10.

$180 + \alpha = 326^\circ\ 37'\ 1{,}''05$
$+\gamma + \varepsilon = \underline{9'\ 5{,}''901}$
$\alpha_1 = 326^\circ\ 46'\ 6{,}''951$

während der Berechnungen der auf verschiedenen Wegen zu erhaltenden gleichartigen Resultate ihren natürlichen Grund haben. Obgleich die Tafelwerte in den Hülfstafeln I. des vierten Abschnittes in Intervallen von 10′, in den Hülfstafeln der Landesaufnahme dagegen in Intervallen von nur 1′ gegeben sind, so erhält man doch die gleiche Genauigkeit. Beide Methoden umgehen alle indirecten Rechnungen; die hier angewendeten Formeln haben aber vor denen der Landesaufnahme die Einfachheit und Übersichtlichkeit in dem elementaren Gange der Entwickelung und die Eleganz in der Form voraus.

In dem

Beispiele 4. auf Seite 82

ist für die Übertragung der geographischen Coordinaten vom Punkt P, Müggelsberg, nach Punkt P_1, Colberg, die Berechnung mit absoluten Zahlenwerten unter Benutzung der Schablone am Ende der Seite 77 ausgeführt.

Die Formeln (43.) und (47.) bis (57.) genügen vollständig für alle geodätischen Linien zwischen zwei Punkten auf dem Erdsphäroide, welche als Seiten aus den Berechnungen, auch der grössten messbaren Dreiecke hervorgegangen sind, und sie geben noch weit darüber hinaus bei allen geodätischen Linien innerhalb der Geltungsbereiche der auf den Seiten 62 bis 66 aufgeführten vierzig rechtwinkligen, sphäroidischen Coordinatensysteme im preussischen Staate scharfe Resultate. Ein Hauptvorteil bei den Berechnungen mit diesen oder mit den Formeln der Landesaufnahme besteht aber darin, und sie haben dieses vor anderen Methoden voraus, dass die Differenzen der Breiten, Längen und Azimute in beiden Punkten berechnet werden, und dadurch die Möglichkeit gegeben wird, auch mit 7- oder 8-stelligen Logarithmen die gewünschte Schärfe in den Resultaten zu erzielen.

Zur Übertragung geographischer Coordinaten und Azimute vermittelst geodätischer Linien von so grosser Länge, dass dieselben erst durch sphärische, ja sphäroidische Berechnung von Übergangsdreiecken*) — aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel — hergestellt werden können, dienen die Besselschen Formeln zur sphäroidischen Übertragung. Eine Entwickelung dieser Formeln zu geben, würde hier zu weit führen, die Formeln selbst aber sollen zu gelegentlicher Anwendung hier folgen, zu welchem Zwecke auch in dem vierten Abschnitte unter II. die zugehörigen Tafeln beigegeben werden.

Die Besselschen Formeln für sphäroidische Übertragung.**)

Ist φ die geographische Breite für Punkt P, ferner s^m die geodätische Linie zwischen P und P_1, a ihr Azimut auf P nach P_1, und wird gesucht die geographische Breite von P_1, das Azimut a_1 der geodätischen Linie s^m auf P_1 und der Längenunterschied l zwischen P und P_1, und bezeichnen ferner u und u_1 die reducierten Breiten — siehe Seite 34 und Nr. (15.) — von P bezw. P_1, so hat man nach folgenden Formeln zu rechnen.

$$\operatorname{tang} u = \sqrt{1 - e^2} \cdot \operatorname{tang} \varphi = [9{,}9985458.2 - 10] \operatorname{tang} \varphi, \qquad (58.)$$

$$\sin m = \cos u \sin a, \qquad (59.)$$

$$\operatorname{cotg} M = \operatorname{cotg} u \cos a. \qquad (60.)$$

Die Minimal- und Maximalwerte von m und M giebt mit a als Argument das folgende Täfelchen.

---

*) Die Berechnung der Übergangsdreiecke giebt die Azimute der vertikalen Schnitte zwischen P und P_1; aus denselben sind nach (40.) Seite 45 die Azimute der geodätischen Linie abzuleiten. Vergl. Baeyer. Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862. Seite 84 bis 87.

**) Albrecht. Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen etc. Zweite Auflage. Leipzig 1879. Seite 79 bis 81.

a	m	M
0°	0°	u
90°	$90 - u$	90
180°	0	$180 - u$
270°	$-(90 - u)$	90

Den sphärischen Bogen σ zwischen P und P_1 erhält man durch wiederholte, annähernde Berechnung aus der Formel

$$\sigma'' = \frac{\alpha}{b_0^m} s^m + \beta \sin \sigma \cos (2M + \sigma) + \gamma \sin 2\sigma \cos (4M + 2\sigma) \cdots, \quad (61.)$$

worin b_0 — $\log \frac{1}{b_0^m} = 3{,}1968107.2-10$ — die kleine Halbaxe der Meridianellipse ist, und α, β, γ aus Tafel II. mit Argument

$$\log \left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos m \right) = 8{,}9136593.9-10 + \log \cos m$$

zu entnehmen sind. Als erster Näherungswert gilt $\sigma_0'' = \frac{\alpha}{b_0^m} s^m$. Mit Benutzung von σ hat man weiter

$$\sin u_1 = \cos m \sin (M + \sigma), \quad (62.)$$

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{tang} u_1 = [0{,}0014541.8] \operatorname{tang} u_1, \quad (63.)$$

$$\operatorname{cotg} a_1 = \operatorname{cotg} m \cos (M + \sigma). \quad (64.)$$

Ferner hat man für den sphärischen Längenunterschied l_1

$$\sin l_1 = \sin \delta \sin a \sec u_1 \quad (65.)$$

und für den sphäroidischen Längenunterschied

$$l = l_1 - \underset{[7{,}8251369-10]}{\frac{e^2}{\sqrt[3]{1 - 0{,}75\, e^2}}} \sin m \left\{ \alpha' \sigma'' + \beta' \sin \sigma \cos (2M + \sigma) \cdots \right\}. \quad (66.)$$

In dieser letzten Gleichung sind α' und β' mit Argument

$$\log \left(\sqrt{\frac{0{,}75\, e^2}{1 - 0{,}75\, e^2}} \cos m \right) = 8{,}8508256-10 + \log \cos m$$

der Tafel II. zu entnehmen.

Die Rechnung mit 8-stelligen Logarithmen giebt für die Hauptglieder der Gleichungen und mit Anwendung der Tafelgrössen scharfe Resultate innerhalb Deutschlands, wenn Berlin der Ausgangspunkt ist. Bei grösserer Länge der geodätischen Linie wird man aber die Rechnung mit 10-stelligen Logarithmen führen, und dabei die Grössen α, β, γ, α', β' mit 10- bis 7-stelligen Logarithmen aus den der Tafel II. für diese Grössen beigegebenen Berechnungsformeln bestimmen müssen.

§. 25. Berechnung der geodätischen Linie s^m und der Azimute a und a_1 an ihren Endpunkten P und P_1, d. h. der gegenseitigen Polarcoordinaten, aus den gegebenen geographischen Coordinaten φ, λ und φ_1, λ_1 dieser Punkte. Umkehrung der vorhergehenden Aufgabe.

Fig. 13. Mit Anwendung der bereits im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln geschieht die Auflösung der Aufgabe in folgender Weise.

1) Längenunterschied l zwischen P und P_1.

$$l = \lambda_1 - \lambda. \quad (52.)$$

2) Breitenunterschied ψ zwischen P_1 und dem Fusspunkte F des Perpendikels P_1F.

Auch hier erhält man bei einem Längenunterschiede l bis zu 30′ bezw. 1° 30′ den Breitenunterschied ψ'' auf vier bezw. drei Decimalen der Secunde genau durch die folgende Gleichung

$$\log \psi'' = \log l''^2 + (5)_{\varphi_1}. \qquad \textbf{(56b.)}$$

Bei einem grösseren Längenunterschiede wird man zuerst mit Anwendung von (56b.), und zwar hinlänglich genau für die weitere Berechnung, $f_0 = \varphi_1 + \psi_0$ und $\frac{1}{2}(\varphi_1 + f_0)$ bestimmen. Substituiert man nun aus Gleichung (51a.) den Ausdruck für log p'' in die Gleichung (56a.), indem man zugleich f_0 für f setzt und berücksichtigt, dass $(\sigma)_{p''} = \frac{1}{3}(\tau)_{p''}$, $(\tau)_{\frac{1}{2}l''} = \frac{1}{4}(\tau)_{l''}$ und dass nach (51a.) als Argument log $(l'' \cos f_0)$ für log p'', d. h. Index $l'' \cos f_0$ für Index p'' gesetzt werden darf, so erhält man

$$\log \psi'' = \log l''^2 + \log \cos f_0 + \log \sin f_0 + (4)_{\varphi_1 f_0} + \tfrac{5}{4}(\tau)_{l''} - \tfrac{2}{3}(\tau)_{l'' \cos f_0}. \qquad \textbf{(56c.)}$$

$$\log \psi^m = \log \psi'' + (1)_{\varphi_1 f_0}. \qquad \textbf{(56d.)}$$

3) und 4) Breite f des Fusspunktes F und Breitenunterschied b zwischen P und F.

$$f = \varphi_1 + \psi, \qquad \textbf{(55.)}$$

$$b = \varphi_1 - \varphi + \psi = f - \varphi, \qquad \textbf{(55a.)}$$

$$b^m = b'' \cdot R \sin 1''; \qquad \textbf{(48.)}$$

$$\log b^m = \log b'' + (1)_{\varphi f}. \qquad \textbf{(48a.)}$$

Nach §. 23. d) Seite 69 und 70 ist andererseits, wenn φ_t und f_t die den φ und f zunächstliegenden Tafelbreiten bezeichnen,

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi - \varphi_t = \zeta; & f - f_t = \zeta_1; \\ \log z^m = \log \zeta'' + (1)_{\varphi\varphi_t}; & \log z_1^m = \log \zeta_1'' + (1)_{ff_t}; \end{array}\right\} \qquad \textbf{(48b.)}$$

$$b^m = \Delta q^m_{f-\varphi} = \Delta q^m_{f_t - \varphi_t} + z_1^m - z^m. \qquad \textbf{(48c.)}$$

5) Perpendikel $P_1F = p^m$ in Längenmass.

$$\operatorname{tang} p = \operatorname{tang} l \cos f, \qquad \textbf{(51.)}$$

oder in logarithmische Form gebracht und den Bogen p in Meter ausgedrückt

$$\log p^m = \log l'' + \log \cos f + (2)_f + (\tau)_{l''} - (\tau)_{p^m}. \qquad \textbf{(51b.)}$$

6) Sphärischer Excess ε des Dreiecks PFP_1.

$$\varepsilon'' = b^m \cdot p^m \cdot \frac{1}{2\, RN \sin 1''}, \qquad \textbf{(43.)}$$

$$\log \varepsilon'' = \log b^m + \log p^m + (3)_{\varphi\varphi_1 f}. \qquad \textbf{(43a.)}$$

7) Meridianconvergenz im Punkte P_1 gegen den Meridian von P.

$$\sin \gamma = \operatorname{tang} p \operatorname{tang} \varphi_1, \qquad \textbf{(53.)}$$

$$\log \gamma'' = \log p^m + \log \operatorname{tang} \varphi_1 + \text{cpl } (2)_f + (\tau)_{p^m} + (\sigma)_{\gamma''}, \qquad \textbf{(53b.)}$$

oder

$$\operatorname{tang} \gamma = \operatorname{tang} l \sin \varphi_1, \qquad \textbf{(54.)}$$

$$\log \gamma'' = \log l'' + \log \sin \varphi_1 + (\tau)_{p^m}. \qquad \textbf{(54a.)}$$

8) Azimut α und α_1 auf P bezw. P_1.

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} p^m}{\sin b^m}{}^{*)}, \qquad \textbf{22.}$$

---

*) Ursprünglich musste es $\operatorname{tang} \alpha = \frac{\operatorname{tang} p}{\sin b} \cdot \frac{R_{\varphi f}}{N_f}$ heissen, um p und b als Bogen desselben Radius auszudrücken, wofür aber $\frac{\operatorname{tang} p^m}{\sin b^m}$ gesetzt werden kann.

$$\log \text{tang}\ \alpha = \log p^m + \text{cpl} \log b^m + (\tau)_{p^m} + (\sigma)_{b^m}, \tag{57a.}$$

$$\alpha_1 = 180 + \alpha + \gamma - \varepsilon. \tag{57.}$$

9) Geodätische Linie $PP_1 = s^m$.

$$s^m = \frac{p^m \cos \frac{1}{3} \varepsilon}{\sin (\alpha - \frac{1}{3} \varepsilon)} \text{ oder tang } s^m = \frac{\text{tang } b^m}{\cos \alpha}.$$ **(50.) und nach 21.**

In logarithmische Form gebracht und berücksichtigt, dass hier stets $\log \cos \frac{1}{3} \varepsilon = 0$ ist,

$$\log s^m = \log p^m + \text{cpl} \log \sin (\alpha - \tfrac{1}{3} \varepsilon) \tag{50b.}$$

oder

$$\log s^m = \log b^m + \text{cpl} \log \cos \alpha + (\tau)_{b^m} - (\tau)_{s^m}. \tag{50c.}$$

Fig. 18a. Als Beispiel ist hier die Umkehrung des Beispiels 1. auf Seite 79 zwischen den Punkten P_1 und P gewählt, jedoch die Rechnung nicht vermittelst des dort benutzten Dreiecks PP_1F, sondern des Dreiecks P_1PF_1 geführt. Dem entsprechend ist auch für dieses Beispiel in den vorstehenden, unter 1) bis 9) gegebenen Berechnungsformeln, φ mit φ_1, λ mit λ_1 zu vertauschen; auch sind zum Unterschiede mit den in Beispiel 1. gebrauchten gleichartigen Bezeichnungen die Buchstaben b, p, f, ε, ψ und γ mit einem Indexe zu versehen.

Siehe Beispiel 5. auf Seite 87.

Mit den im Beispiele 1. gegebenen $\log s^m$ und α stimmen die hier errechneten Werte vollständig überein, während die dort und hier gefundenen Werte für α_1 um 0,″002 differieren.

Für die Berechnung der gegenseitigen Polarcoordinaten zweier geodätischer Punkte aus deren geographischen Coordinaten, insofern die Punkte Eckpunkte messbarer Dreiecke sind, oder innerhalb der Geltungsbereiche der bereits aufgeführten 40 Coordinatensysteme liegen, geben die in diesem Paragraphen bis jetzt angewendeten Formeln scharfe Resultate. Für grössere Längen- und Breitenunterschiede dienen die Besselschen Formeln.

Sind mit Beibehaltung der Buchstaben der Besselschen Formeln des §. 24. von zwei geodätischen Punkten P, P_1 die geographischen Breiten φ, φ_1 und ihr sphäroidischer Längenunterschied l gegeben und sucht man die Länge der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$ und deren Azimute α und α_1, so geben die folgenden Formeln die Auflösung.*)

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } u &= \sqrt{1-e^2} \text{ tang } \varphi = [9{,}9985458.2-10] \text{ tang } \varphi; \\ \text{tang } u_1 &= \sqrt{1-e^2} \text{ tang } \varphi_1 = [9{,}9985458.2-10] \text{ tang } \varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{58.}$$

Erster Näherungswert l_0 für den sphärischen Längenunterschied l_1 ist

$$l_0 = l + \underset{[2{,}8385320]}{\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{\sin 1''}} \cos u_1 \cos u \sin l. \tag{67.}$$

Führt man nun $\sin l_0$ in diese Gleichung ein, so hat man für l_1

$$l_1 = l + [2{,}8385320] \cos u_1 \cos u \sin l_0, \tag{67a.}$$

welcher Wert einer Genauigkeit entspricht, welche man mit 7-stelligen Logarithmen erlangen kann. Mit diesem l_1 ergiebt sich nun weiter

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} \sigma = \sin^2 \tfrac{1}{2} (u_1 - u) + \cos u_1 \cos u \sin^2 \tfrac{1}{2} l_1, \tag{68.}$$

Fortsetzung auf Seite 88.

*) Albrecht. Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen etc.

5. Berechnung der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$ und ihrer Azimute, α auf P, α_1 auf P_1, d. h. der gegenseitigen Polarcoordinaten, aus den gegebenen geographischen Coordinaten φ und λ auf P, φ_1 und λ_1 auf P_1.

Gegeben: $\lambda = 31^\circ\ 0'\ 0''$; $\lambda_1 = 32^\circ\ 22'\ 6,''0327$; $\varphi = 57^\circ\ 0'\ 0''$; $\varphi_1 = 56^\circ\ 13'\ 49,''0219$.

Gesucht: s^m ; α ; α_1.

1.

$l = -\ 1^\circ\ 22'\ 6,''0327$

$l'' = -\ 4926,''0327$

2.

$\log l''^2 = 7,38499\,5$

$(5)_\varphi = \underline{4,04512.0}$

$\log \psi_0'' = 1,43011.5$

$\psi_0'' = 26,''923$

$f_0 = 57^\circ\ 0'\ 26,''923$

$\frac{1}{2}(\varphi + f_0) = 57^\circ\ 0,'224$

$\frac{5}{4}(\tau)_{l''} = 1032$

$-\frac{3}{2}(\tau)_{l''\cos f_0} = \underline{-367}$

$+665$

$\log l'' = 3,6924973n$

$\log l'' = 3,6924973n$

$\log \cos f_0 = 9,7360215$

$\log \sin f_0 = 9,9236282$

$(4)_{\varphi f_0} = 4,3854095$

$\frac{5}{4}(\tau)_{l''} - \frac{3}{2}(\tau)_{l''\cos f_0} = \underline{+665}$

$\log \psi_1'' = 1,4301203$

$(1)_{\varphi f_0} = \underline{1,4903756}$

$\log \psi_1^m = 2,9204959$

$\psi_1'' = 26,''9228$

$\psi_1^m = 832,^m7140$

3.

$\varphi + \psi_1 = f_1 = 57^\circ\ 0'26,''9228$

$f_1 - f_{t_1} = \zeta'' = \psi_1'' = 26,''9228$

$\varphi_1 - \varphi_{t_1} = \zeta_1'' = 229,''0219$

4.

$\log \zeta_1'' = 2,3598770.1$

$(1)_{\varphi_1 \varphi_{t_1}} = \underline{1,4903192.2}$

$\log z_1^m = 3,8501962.3$

$z_1^m = 7082,^m6579$

$z^m = \psi_1^m$

$\Delta q^m_{f_{t_1} - \varphi_{t_1}} = 92782,^m8050$

$\psi_1^m - z_1^m = \underline{-6249,9439}$

$b_1^m = 86532,8611$

$\log b_1^m = 4,9371810.7$

5. 6.

$\log l'' = 3,6924972.9n$

$\log \cos f_1 = 9,7360214.8$

$(2)_{f_1} = 1,4912403.2$

$(\tau)_{l''} - (\tau)_{p_1^m} = \underline{580.5}$

$\log p_1^m = 4,9198171.4n$

$\log b_1^m = 4,9371810.7$

$(3)_{\varphi\varphi_1 f_1} = \underline{1,402952}$

$\log \varepsilon_1'' = 1,259950n$

$\varepsilon_1'' = -18,''195$

7.

$\log l'' = 3,6924972.9n$

$\log \sin \varphi = 9,9235914.0$

$(\tau)_{p_1 m} = \underline{245.4}$

$\log \gamma_1'' = 3,6161132.3n$

$\gamma_1'' = -4131,''552$

8.

$\log \frac{p_1^m}{b_1^m} = 9,9826360.7n$

$(\tau)_{p_1^m} + (\sigma)_{b_1^m} = \underline{378.4}$

$\log \text{tang}\ \alpha_1 = 9,9826739.1n$

$\alpha_1 = 316^\circ\ 8'\ 33,''357$

$180 + \gamma_1 - \varepsilon_1 = \underline{178^\circ 51'\ 26,''643}$

$\alpha = 135^\circ\ 0'\ 0''$

9.

$\log p_1^m = 4,9198171.4$

$\text{cpl l. sin}(\alpha_1 - \frac{1}{3}\varepsilon_1) = \underline{0,1593641.1}$

$\log s^m = 5,0791812.5$

$$\left.\begin{aligned} \sin a &= \frac{\cos u_1 \sin l_1}{\sin \sigma}, \\ \sin a_1 &= -\frac{\cos u \sin l_1}{\sin \sigma}, \end{aligned}\right\} \quad (65.)$$

$$\sin m = \cos u \sin a, \quad (59.)$$

$$\operatorname{cotg} M = \operatorname{cotg} u \cos a. \quad (60.)$$

Über die Grenzwerte von m und M gilt das im §. 24. Gesagte; ferner sind l und l_1 positiv oder negativ, je nachdem P_1 östlich oder westlich von P liegt. Mit Anwendung von σ, m, M und der mit Argument 8,9136593.9 — 10 + log cos m aus Tafel II. zu entnehmenden Zahlenwerte von α, β, γ hat man alsdann für die geodätische Linie den nachfolgenden Ausdruck:

$$s^m = \frac{b_0^m}{\alpha}\left\{\sigma'' - \beta \sin \sigma \cos(2M + \sigma) - \gamma \sin 2\sigma \cos(4M + 2\sigma) \cdots\right\}. \quad (61.)$$

Will man eine grössere Genauigkeit, so muss man die Hauptrechnungen mit 10-stelligen, die Nebenrechnungen nach Bedürfnis mit 7-, 6- und 5-stelligen Logarithmen ausführen, und zwar hat man dann mit Zugrundelegung des l_1 aus (67a.) und des σ aus (68.) zu setzen

$$\sin m = \frac{\cos u_1 \cos u \sin l_1}{\sin \sigma}, \quad (69.)$$

$$\sin M = \frac{\sin u}{\cos m}, \quad (70.)$$

und endlich

$$l_1 = l + \underset{[7,8251369 - 10]}{\frac{e^2}{\sqrt{1 - 0{,}75\, e^2}}} \sin m \left\{\alpha' \sigma'' + \beta' \sin \sigma \cos(2M + \sigma) \cdots\right\}. \quad (66.)$$

Mit diesem letzten Werte von l_1 sind schliesslich σ, a, a_1, m, M und s^m nach den Formeln (68.), (65.), (59.), (60.) und (61.) nochmals und zwar definitiv zu berechnen, wofür nötigenfalls die Werte von α, β, γ nach den Tafel II. beigegebenen Berechnungsformeln mit der gehörigen Anzahl Decimalstellen zu bestimmen sind.

B. Die rechtwinkligen, sphäroidischen Coordinaten.

§. 26. Allgemeine Eigenschaften eines rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensystems.

Die Definition eines rechtwinklig-sphärischen Coordinatensystems ist bereits in §. 6. 4) Seite 17 gegeben, auch findet man in der Einleitung auf Seite 2 bei der Besprechung der bayerischen Vermessungen nnd in §. 22. 2. Seite 56 unter Bayern Andeutungen über ein solches, von dem Astronomen Soldner auf das Erdsphäroid angewendetes System. So lange man es nur mit einem so kleinen Teile unserer Erdoberfläche zu thun hat, dass für denselben mit zweckentsprechender Genauigkeit das Oberflächenstück einer Kugel — Soldner nennt dieselbe Berührungskugel — substituiert werden kann, hat ein solches sphärisches System durch seine einfacheren Formeln vor dem sphäroidischen den Vorzug. Sobald aber der Teil der Erdoberfläche eine solche Ausdehnung hat, dass zumal nach den neueren Fortschritten der wissenschaftlichen Geodäsie, und nach den — infolge des grösseren Wertes des Grundeigentums — auch höher gestellten Anforderungen in bezug auf Genauigkeit die sphäroidische Gestalt der

Erdoberfläche nicht mehr ausser acht gelassen werden darf, muss auch ein sphäroidisches an die Stelle des sphärischen Systems treten. Im wesentlichen stimmt das sphäroidische mit dem sphärischen Systeme darin überein, dass für beide ein geodätischer Punkt P_0, welcher für das sphärische System in der Regel der Berührungspunkt des Sphäroides und der Sphäre ist, als Nullpunkt und sein Meridian, bezw. dessen Projection auf die Kugel als Abscissenaxe gewählt wird, während ein auf der Abscissenaxe im Punkte P_0 senkrecht stehender Bogen die Ordinatenaxe abgiebt. Die Festlegung irgend eines geodätischen Punktes P, bezw. dessen Projection auf die Kugel, geschieht alsdann dadurch, dass von demselben auf die Abscissenaxe ein senkrechter Bogen PF gezogen und die Länge von P_0F als Abscisse und die des Bogens PF als Ordinate des Punktes berechnet wird. Der Unterschied beider Systeme besteht darin, dass in dem sphäroidischen Systeme die Bogen elliptische, in dem sphärischen dagegen Kreisbogen sind, und in diesem Sinne auch bei beiden Systemen die Berechnungen von einander abweichend geführt werden.

Nur für das rechtwinklig-sphäroidische Coordinatensystem sollen hier die Formeln entwickelt werden. Führt man nämlich in diesen statt der veränderlichen Krümmungsradien einen constanten ein, so können leicht aus den sphäroidischen die einfacheren, sphärischen Formeln abgeleitet werden.

Für das rechtwinklig-sphäroidische Coordinatensystem gelten nun folgende Bestimmungen. Vom Nullpunkte aus sind die Abscissen nach Norden +, nach Süden —, die Ordinaten nach Osten +, nach Westen —. Für alle Punkte in der Abscissenaxe ist die Nordrichtung derselben die Anfangsrichtung der Azimute, welche über Osten gezählt werden. In jedem anderen Punkte ist die Anfangsrichtung für die Richtungswinkel der positiven Abscissenaxe im Punkte P_0 parallel. Diese Richtungen, mit ϱ bezw. ϱ_1 in der Folge bezeichnet, sind von den Azimuten verschieden und weichen von denselben um so mehr ab, je weiter der Punkt von P_0 und der Abscissenaxe absteht.

Bei den folgenden Aufgaben sind nicht allein die geographischen Coordinaten φ_0, λ_0 des Nullpunktes P_0 stets gegeben, sondern es wird auch vorausgesetzt, dass für das betreffende Coordinatensystem nach den Formeln auf Seite 69, nämlich $q^m = q_t^m + \Delta q^m_{\varphi - \varphi_t}$ und $x^m = q^m - q_0^m$, ein Specialtäfelchen zu Tafel I., entsprechend der Spalte x^m in Tafel IA., für die Abscissen x^m der Tafelbreiten φ zusammengestellt ist, in welchem $x = 0$ der Breite φ_0 des Nullpunktes entspricht.

§. 27. Berechnung der rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten.

Fig. 4. und Fig. 18. 1. Gegeben sind die Polarcoordinaten des Punktes P, bezogen auf den Nullpunkt P_0 als Pol, nämlich die geodätische Linie $P_0P = s^m$ und das Azimut α_0 derselben auf P_0; gesucht werden die Coordinaten x^m, y^m des Punktes P.

Die Auflösung geschieht durch Berechnung des geodätischen, rechtwinkligen Dreiecks P_0FP, in welchem $P_0F = x$, $PF = y$ ist; aus diesem Grunde wird jenes Dreieck auch das Coordinatendreieck genannt.

1.) Argumentbestimmung für (3).

$$\log \tfrac{1}{2}\, x' = \log s^m \cos \alpha_0 + (7)_{\varphi_0}, \qquad (47.)$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\varphi_0 + \varphi + f) = \varphi_0 + \tfrac{1}{2}\, x'. \qquad (47a.)$$

2.) Sphärischer Excess des Dreiecks P_0FP.

$$\log \varepsilon'' = \log (s^{m2} \cos \alpha_0 \sin \alpha_0) + (3)_{\varphi_0 \varphi f}. \qquad (43a.)$$

3.) Coordinaten des Punktes P.

$$x^m = s^m \cos (\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon); \quad y^m = s^m \sin (\alpha_0 - \tfrac{1}{2}\,\varepsilon). \qquad (48.) \text{ und } (50.)$$

6. Beispiel.

$\varphi_0 = 56^\circ\ 13',817$;	$\alpha_0 = 316^\circ\ 8'\ 33,''355$;	$\log s^m = 5,0791812.5$.
$\log s^m = 5,07918$	$\log s^{m2} = 10,15836$	$\log s^m = 5,0791812.5$
$\log \cos \alpha_0 = 9,85798$	$\log \cos \alpha_0 = 9,85798$	$\mathrm{l.}\cos(\alpha_0 - \frac{2}{3}\varepsilon) = 9,8579998.2$
$(7)_{\varphi_0} = 6,55545$	$\log \sin \alpha_0 = 9,84065n$	$\mathrm{l.}\sin(\alpha_0 - \frac{1}{3}\varepsilon) = 9,8406358.9n$
$\log \frac{2}{3}\, x' = 1,49261$	$(3)_{\varphi_0 \varphi f} = 1,40295$	$\log x^m = 4,9371810.7$
	$\log \varepsilon'' = 1,25994n$	$\log y^m = 4,9198171.4n$
$\frac{2}{3}\, x' = 31,'090$	$\varepsilon'' = -18,''195$	
$\varphi_0 = 56^\circ\ 13,'817$	$\frac{1}{3}\,\varepsilon'' = -\ 6,''065$	$x^m = +86532,^m861$
$\varphi_0 + \frac{2}{3}\, x' = 56^\circ\ 44,'91$	$\frac{2}{3}\,\varepsilon'' = -12,''130$	$y^m = -83141,^m364$

Mit Umgehung der Excessberechnung kann man die Coordinaten x^m, y^m mit Benutzung der Tafel III. aus folgenden Gleichungen erhalten.

$$\operatorname{tang} x^m = \operatorname{tang} s^m \cos \alpha_0, \tag{21.}$$

$$\sin y^m = \sin s^m \sin \alpha_0, \tag{17.}$$

und durch Übertragung in logarithmische Form

$$\log x^m = \log s^m + \log \cos \alpha_0 + (\tau)_{s^m} - (\tau)_{x^m}, \tag{48d.}$$

$$\log y^m = \log s^m + \log \sin \alpha_0 + (\sigma)_{y^m} - (\sigma)_{s^m}. \tag{50d.}$$

Beispiel 6a.

Dasselbe Beispiel wie oben.

$\log s^m = 5,0791812.5$	$\log s^m = 5,0791812.5$
$\log \cos \alpha_0 = 9,8579752.8$	$\log \sin \alpha_0 = 9,8406491.9n$
$(\tau)_{s^m} - (\tau)_{x^m} = +\ 245.4$	$(\sigma)_{y^m} - (\sigma)_{s^m} = -\ 133.0$
$\log x^m = 4,9371810.7$	$\log y^m = 4,9198171.4n$
$x^m = +86532,^m861$	$y^m = -\ 83141,^m364$

Dass für so lange geodätische Linien, wie die vorliegende, bei Bildung der (τ) und (σ) die geographische Breite φ_0 mit Anwendung des Täfelchens auf Seite 72 Berücksichtigung finden muss, ist wohl selbstverständlich, wie dieses auch schon bei den früheren Beispielen der Fall war.

Eine Vergleichung von $\log x^m$ und $\log y^m$ mit $\log b_{\prime}{}^m$ und $\log p_{\prime}{}^m$ in Beispiel 5. giebt einen Beweis für die Schärfe der Berechnung.

2. Gegeben sind die Breite φ und die Länge λ des Punktes P; gesucht werden die Coordinaten x^m und y^m dieses Punktes.

1.) Längenunterschied l zwischen P_0 und P.

$$l = \lambda - \lambda_0. \tag{52.}$$

2.) Breitenunterschied ψ'' zwischen dem Fusspunkte F der Ordinate in der Abscissenaxe und der Breite φ des Punktes P.

$$\log \psi'' = \log l''^2 + (5)_{\varphi}. \tag{56b.}$$

3.) Breite des Punktes F.

$$f = \varphi + \psi. \tag{55.}$$

4.) Abscisse $P_0F = x^m$ des Punktes P.

$$x = f - \varphi_0, \tag{49.}$$

$$x^m = x'' \cdot R \sin 1'', \tag{48.}$$

$$\log x^m = \log x'' + (1)_{\varphi_0 f}. \tag{48a.}$$

Für die meisten Fälle genügen zur Berechnung von x^m die unter 2.) bis 4.) aufgeführten Formeln; für grössere Längen- und Breitenunterschiede hat man in folgender Weise zu rechnen.

2a.) Breitenunterschied ψ_0'', Näherungswert.

$$\log \psi_0'' = \log l''^2 + (5)_\varphi. \tag{56b.}$$

3a.) Breite des Punktes F, Näherungswert.

$$f_0 = \varphi + \psi_0. \tag{55.}$$

2b.) Breitenunterschied ψ'', genauer Wert.

$$\log \psi'' = \log (l''^2 \cos f_0 \sin f_0) + (4)_{\varphi f_0} + \tfrac{5}{4}(\tau)_{l''} - \tfrac{3}{2}(\tau)_{l'' \cos f_0}. \tag{56c.}$$

3b.) Breite des Punktes F, genauer Wert.

$$f = \varphi + \psi. \tag{55.}$$

4a.) Abscisse $P_0F = x^m$ des Punktes P.

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = f - f_t, \\ \log z^m = \log \zeta'' + (1)_{f f_t}, \end{array}\right\} \text{nach (48b.)}$$

$$x^m = x_t^m + z^m. \tag{48e.}$$

5.) Ordinate $PF = y^m$ des Punktes P.

$$\log y^m = \log l'' + \log \cos f + (2)_f + (\tau)_{l''} - (\tau)_{y^m}. \tag{51b.}$$

6.) Meridianconvergenz γ in P gegen die Abscissenaxe in P_0. Dieselbe wird erst später bei der weiteren Verwendung der Coordinaten benutzt.

$$\log \gamma'' = \log l'' + \log \sin \varphi + (\tau)_{y^m}. \tag{54a.}$$

Die beiden hier folgenden Beispiele behandeln geodätische Punkte, deren Coordinaten auch im §. 29. ihre weitere Verwendung finden werden. Die Punkte liegen in dem Geltungsbereiche des Coordinatensystems 35., welches den Martinsturm in Cassel zum Nullpunkte und die Walbeckschen Elemente des Erdsphäroides als Grundlage hat weshalb auch die Tafel IA. zu benutzen ist. Wegen nachträglicher Verbesserung der bei der Dreiecksberechnung benutzten Länge der Braacker Grundlinie sind die log x^m und log y^m in 7ter Decimale um 125*) Einheiten, bezw. die absoluten Werte von x^m und y^m um $\frac{125}{\delta x}$ resp. $\frac{125}{\delta y}$ zu vermindern. δx und δy sind die der Logarithmentafel zu entnehmenden logarithmischen Änderungen, welche der Vermehrung der absoluten Werte von x^m und y^m um 1^m entsprechen.

---

*) Siehe Seite 59, Zeile 5 bis 10 v. o.

7. Beispiel. Berechnung der Coordinaten x^m, y^m von P = Berger Warte, Turm.

Nullpunkt P_0 = Cassel, Martinsturm.

Gegeben:		
$\varphi = 50^\circ\ 9'\ 38,''740$; $\lambda = 26^\circ\ 24'\ 11,''330$;		
$\varphi_0 = 51^\circ\ 19'\ 6,''509$; $\lambda_0 = 27^\circ\ 9'\ 56,''956$.		
$\psi'' = 9,''0134$	$\lambda - \lambda_0 = l = -0^\circ\ 45'\ 45,''626$	
$\varphi + \psi = f = 50^\circ\ 9'\ 47,''7534$	$l'' = -\ 2745,''626$	
$f - \varphi_0 = x = -1^\circ\ 9'\ 18,''7556$		
$x'' = -\ 4158,''7556$	$\log l''^2 = 6,87728.3$	
	$(5)_\varphi = 4,07760.7$	Für spätere Verwendung ist die Meridianconvergenz γ in P gegen den Meridian von P_0, Cassel, hier gleich mitberechnet.
$\mathrm{l.}(f - f_t) = \mathrm{l.}\zeta'' = 1,0880155.4n$	$\log \psi'' = 0,95489.0$	
$(1)_{ff_t} = 1,4898487.2$		
$\log z^m = 2,5778642.6n$	$\log l'' = 3,4386414.1n$	
	$\log \cos f = 9,8065883.8$	$\log l'' = 3,4386414.1n$
	$(2)_f = 1,4910301.0$	$\log \sin \varphi = 9,8852735.8$
$x_t^m = -128107,^m337$	$(\tau)_{l''} - (\tau)_{y^m} = +\ 148.9$	$(\tau)_{y^m} = +\ 107.8$
$z^m = -\ 378,324$	$-$ const $= -\ 125.0$	$\log \gamma'' = 3,3239257.7n$
$\frac{125}{33.8} = +\ 3,698$	$\log y^m = 4,7362622.8n$	$\gamma'' = -\ 2108,''268$
$x^m = -128481,^m963$	$y^m = -54483,^m160$	$\gamma = -0^\circ\ 35'\ 8,''268$

8. Beispiel. Berechnung der Coordinaten x_1^m, y_1^m von P_1 = Frankfurt, Katharinenturm.

Nullpunkt P_0 = Cassel, Martinsturm.

Gegeben:		
$\varphi_1 = 50^\circ\ 6'\ 51,''701$; $\lambda_1 = 26^\circ\ 20'\ 38,''567$;		
$\varphi_0 = 51^\circ\ 19'\ 6,''509$; $\lambda_0 = 27^\circ\ 9'\ 56,''956$.		
$\psi_1'' = 10,''4676$	$l_1 = -0^\circ\ 49'\ 18,''389$	
$f_1 = 50^\circ\ 7'\ 2,''1686$	$l_1'' = -\ 2958,''389$	
$x_1 = -1^\circ\ 12'\ 4,''3404$		
$x_1'' = -\ 4324,''3404$	$\log l_1''^2 = 6,94211.1$	
	$(5)_{\varphi_1} = 4,07773.8$	
$\log \zeta_1'' = 2,2500084.2n$	$\log \psi_1'' = 1,01984.9$	Meridianconvergenz γ_1 in P_1 gegen die Abscissenaxe in P_0.
$(1)_{f_1 f_{t_1}} = 1,4898470.2$		
$\log z_1^m = 3,7398554.4n$	$\log l'' = 3,4710552.8n$	
	$\log \cos f_1 = 9,8070059.4$	$\log l_1'' = 3,4710552.8n$
$x_{t_1}^m = -128107,^m337$	$(2)_{f_1} = 1,4910289.6$	$\log \sin \varphi_1 = 9,8849798.9$
$z_1^m = -\ 5493,580$	$(\tau)_{l_1''} - (\tau)_{y_1^m} = +\ 172.8$	$(\tau)_{y_1^m} = 125.5$
$\frac{125}{32.5} = +\ 3,846$	$-$ const $= -\ 125.0$	$\log \gamma_1'' = 3,3560477.2n$
	$\log y_1^m = 4,7690949.6n$	$\gamma_1'' = -\ 2270,''114$
$x_1^m = -133597,^m071$	$y_1^m = -58761,^m478$	$\gamma_1 = -0^\circ\ 37'\ 50,''114$

§. 28. Berechnung der geographischen Coordinaten des Punktes P aus dessen rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten x^m, y^m, und den geographischen Coordinaten φ_0, λ_0 des Nullpunktes P_0.

Mit den bereits bei den früheren Aufgaben entwickelten, mithin bekannten Formeln, und mit Anwendung der in §. 23. a) bis d) aufgestellten, von q^m auf x^m übertragenen Bezeichnungsweise, ist die Auflösung der Aufgabe durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\log \tfrac{1}{2}\, x' = \log x^m + (7)_{\varphi_0} + 9{,}87506-10, \tag{47.}$$

$$\tfrac{1}{2}\,(\varphi_0 + f) = \varphi_0 + \tfrac{1}{2}\, x', \tag{47a.}$$

$$\log x'' = \log x^m + \text{cpl}\,(1)_{\varphi_0 f}, \tag{48.}$$

$$f = \varphi_0 + x''. \tag{49.}$$

Ist der Bogen x aber so gross, dass man denselben nicht mehr als Kreisbogen ansehen darf, so wende man die nachstehenden drei Formeln an.

$$z^m = x^m - x_t^m, \tag{48e.}$$

$$\log \xi'' = \log z^m + \text{cpl}\,(1)_t - \left(\frac{z^m\, \delta\,(1)}{2\, \delta\, x}\right). \tag{48f.}$$

$$f = \varphi_t + \xi''. \tag{48b.}$$

Ferner ist

$$\log l'' = \log y^m + \text{cpl} \log \cos f + \text{cpl}\,(2)_f + (\tau)_{y^m} - (\tau)_{l''}. \tag{51b.}$$

$$\lambda = \lambda_0 + l. \tag{52.}$$

$$\log \psi'' = \log l'' + \log y^m + \log \sin f + \text{cpl} \log 2\, R_f + \tfrac{1}{4}\, (\tau)_{l''} - (\sigma)_{y^m}, \quad \text{(50a.) u. (56a.)}$$

oder

$$\log \psi'' = \log l''^2 + (5)_f. \tag{56b.}$$

$$\varphi = f - \psi''. \tag{55.}$$

9. Beispiel. Berechnung der geographischen Coordinaten φ, λ des Punktes P = Höchst, Schlossturm, aus dessen rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten x^m, y^m und den geographischen Coordinaten φ_0, λ_0 des Nullpunktes P_0 = Schaumburg.

Gegeben: $\varphi_0 = 50°\ 20'\ 23,''63$; $\lambda_0 = 25°\ 38'\ 29,''61$.		$x^m = -26656,^m95$;	$y^m = +40785,^m25$.
		$\log x^m = 4{,}4258104.8n$	$\log y^m = 4{,}6105031.5$
$\log x^m = 4{,}42581n$		$\text{cpl}\,(1)_{\varphi_0 f} = 8{,}5101170.3$	$\text{cpl} \log \cos f = 0{,}1928394.0$
$(7)_{\varphi_0} = 6{,}55587$	$\log l''^2 = 6{,}62452$	$\log x'' = 2{,}9359275.1n$	$\text{cpl}\,(2)_f = 8{,}5089270.0$
$\log \tfrac{3}{4} = 9{,}87506$	$(5)_f = 4{,}07779$	$x'' = -862,''8345$	$(\tau)_{y^m} - (\tau)_{l''} = -\ 84.3$
$\log \tfrac{1}{2}\, x' = 0{,}85674n$	$\log \psi'' = 0{,}70231$		$\log l'' = 3{,}3122611.2$
$\tfrac{1}{2}\, x' = -7,'190$	$\psi'' = 5,''0386$	$\varphi_0 = 50°\ 20'\ 23,''63$	$l'' = 2052,''3958$
		$x = -\ 14'\ 22,''8345$	
$\tfrac{1}{2}(\varphi_0 + f) = 50°\ 13,'204$		$f = 50°\ 6'\ 0,''7955$	$\lambda_0 = 25°\ 38'\ 29,''61$
		$-\psi'' = -\ 5,''0386$	$l = +\ 34'\ 12,''3958$
		$\varphi = 50°\ 5'\ 55,''7569$	$\lambda = 26°\ 12'\ 42,''0058$

Die in der Publication der nassauischen Landesvermessung gegebenen geographischen Coordinaten für Höchst sind: $\varphi = 50^\circ\ 5'\ 55,''78$, $\lambda = 26^\circ\ 12'\ 41,''94$, mithin ist in der Breite eine Differenz $= 0,''02$ (31), in der Länge eine Differenz $= -0,''06$ (58). Solche Differenzen waren aber bei der wenig exacten Behandlungsweise in den Berechnungen der nassauischen Landesvermessung vorauszusehen. Überhaupt kann diese ganze Vermessungsarbeit auf wissenschaftlichen Wert durchaus keinen Anspruch machen.

§. 29. Berechnung der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$ und ihrer nach der Abscissenaxe orientierten Richtungen, ϱ auf P und ϱ_1 auf P_1, aus den gegebenen geographischen Coordinaten φ, λ und φ_1, λ_1 der Punkte P und P_1.

Die Berechnung bis exclusive ϱ und ϱ_1 geschieht nach den in §. 25. unter 1) bis 9) gegebenen Formeln. Um alsdann noch die Richtungen ϱ und ϱ_1 zu erhalten, hat man die Meridianconvergenzen γ in P, γ_1 in P_1, welche bereits bei der Berechnung der rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten von P und P_1, §. 27. 2. unter 6.) mitbestimmt wurden, von den Azimuten α und α_1 abzuziehen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \alpha - \gamma, \\ \varrho_1 &= \alpha_1 - \gamma_1. \end{aligned}\right\} \quad (71.)$$

Die Richtung ϱ_1 wird nur bei einem Anschlusse einer folgenden geodätischen Linie $P_1P_2 = s_1^m$ an s^m im Punkte P_1 zur Bestimmung der Richtung P_1P_2 benutzt.

Die Richtungsdifferenz $(\varrho + 180) - \varrho_1 = E$ ist zusammengesetzt aus den drei Meridianconvergenzen zwischen den Punkten P_0, P, P_1 und dem sphärischen Excess ε des Dreiecks PF_2P_1 und hat die Form

$$E = (\varrho + 180) - \varrho_1 = -\gamma + \gamma_1 - \gamma_2 + \varepsilon. \quad (72.)$$

Sind F_2 und F_2' die Fusspunkte der Perpendikel von P_1 auf den Meridian von P, bezw. auf den durch P parallel mit dem Meridian von P_0 — d. h. mit der Abscissenaxe, also auch senkrecht auf der durch P_0 gezogenen Ordinatenaxe — gedachten Bogen, so ist PF_2P_1 das rechtwinklig-sphärische Dreieck, welchem die Katheten b und p, sowie das Azimut α angehören, während das Dreieck $PF_2'P_1$ mit den Katheten ξ — parallel der Abscissenaxe — und η nebst der Richtung ϱ dem rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensysteme sich anschliesst. Die Kathete ξ ist übrigens kein Bogen einer grössten Ellipse, sondern einer Parallelellipse, bezogen auf die Ebene des Anfangsmeridians, und hat angenähert, wie aus der Betrachtung §. 14., Seite 37 (vergl. auch Berichtigungen) zu entnehmen ist, zum Krümmungsradius in P

$$R_1 = \frac{a\,(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 f)^3}} \cdot \cos y. \quad (21.)$$

Bei der relativen Kleinheit der Bogen y und ξ kann man ξ jedoch, dem Zwecke entsprechend, als identisch mit dem Bogen einer grössten Ellipse zwischen den Punkten P und F_2' ansehen, und darnach das Dreieck berechnen, wozu die beiden folgenden Formeln dienen.

$$\left.\begin{aligned} \xi^m &= s^m \cos\left(\varrho - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon\right), \\ \eta^m &= s^m \sin\left(\varrho - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon\right), \end{aligned}\right\} \quad (73.)$$

wobei ε als identisch mit dem Excess des Dreiecks PF_2P_1 angesehen werden kann.

10. Beispiel*). Berechnung der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$ und ihrer Richtungen ϱ in P, ϱ_1 in P_1 aus den gegebenen geographischen Coordinaten φ, λ und φ_1, λ_1 der Punkte P und P_1. Berechnung der Katheten ξ^m und η^m des Dreiecks $PF_2'P_1$.

P = Berger Warte, Turm; P_1 = Frankfurt, Katharinenturm;
P_0 = Cassel, Martinsturm.

Gegeben: $\varphi_1 = 50^\circ\ 6'\ 51,''701$; $\varphi = 50^\circ\ 9'\ 38,''740$;	$\lambda_1 = 26^\circ\ 20'\ 38,''567$; $\lambda = 26^\circ\ 24'\ 11,''330$;	$\gamma_1 = -0^\circ\ 37'\ 50,''114$; $\gamma = -0^\circ\ 35'\ 8,''268$.
$\psi_2'' = +\ 0,''0541$	$l_2 = -0^\circ\ 3'\ 32,''763$	$\log b^m p^m = 7,33846$
$\varphi_1 + \psi_2 = f_2 = 50^\circ\ 6'\ 51,''7551$	$l_2'' = -\ 212,''763$	$(3)_{\varphi\varphi_1 f_2} = 1,40367$
$f_2 - \varphi = b = -0^\circ\ 2'\ 46,''9849$		$\log \varepsilon'' = 8,74213$
$b'' = -\ 166,''9849$	$\log l_2''^2 = 4,65579$	$\varepsilon'' = 0,''055$
	$(5)_{\varphi_1} = 4,07774$	
$\log b'' = 2,2226772.4n$	$\log \psi_2'' = 8,73353$	$\log l'' = 2,3278961.2n$
$(1)_{\varphi f_2} = 1,4898467.0$		$\log \sin \varphi_1 = 9,8849798.9$
$-\text{const} = -\ 125.0$**)	$\log l_2'' = 2,3278961.2n$	$(\tau)_{p^m} = +\ 0.7$
$\log b^m = 3,7125114.4n$	$\log \cos f_2 = 9,8070321.8$	$\log \gamma_2'' = 2,2128760.8n$
$\text{cpl} \log p^m = 6,3740552.4$	$(2)_{f_2} = 1,4910288.8$	$\gamma_2 = -0^\circ\ 2'\ 43,''259$
$-[(\tau)_{p^m} + (\sigma)_{b^m}] = -\ 1.2$	$(\tau)_{l_2''} - (\tau)_{p^m} = +\ 0.8$	
$\log \text{cotg}\, \alpha = 0,0865665.6$	$-\text{const} = -\ 125.0$**)	$\alpha = 219^\circ\ 19'\ 37,''730$
$\log p^m = 3,6259447.6n$	$\log p^m = 3,6259447.6n$	$180 + \gamma_2 - \varepsilon = 179^\circ\ 57'\ 16,''686$
$\text{cpl l.} \sin(\alpha - \frac{1}{3}\varepsilon) = 0,1980837.8n$		$\alpha_1 = 39^\circ\ 16'\ 54,''416$
$\log s^m = 3,8240285.4$	$s^m = 6668,^m505$	
$\log \cos(\varrho - \frac{2}{3}\varepsilon) = 9,8848079.1n$		$\varrho = \alpha - \gamma = 219^\circ\ 54'\ 45,''998$
$\log \sin(\varrho - \frac{1}{3}\varepsilon) = 9,8072783.1n$		$\varrho_1 = \alpha_1 - \gamma_1 = 39^\circ\ 54'\ 44,''530$
$\log \xi^m = 3,7088364.5n$	$\xi^m = -5114,^m892$	$(\varrho + 180) - \varrho_1 = E = 1,''468$
$\log \eta^m = 3,6313068.5n$	$\eta^m = -4278,^m651$	$= -\gamma + \gamma_1 - \gamma_2 + \varepsilon$

In den §§. 25. bis einschliesslich 28. wurde auf streng wissenschaftlichem Wege alles Material zusammengestellt, welches für die Berechnungen und gegenseitigen Beziehungen der Punkte eines rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensystems notwendig ist, und dieses durch Beispiele veranschaulicht. Sollen ferner z. B. aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten zweier Punkte die sie verbindende geodätische Linie und ihre Azimute gefunden werden, so berechnet man zunächst nach §. 28. die geographischen Coordinaten der Punkte und hieraus nach §. 25. die gewünschten Stücke.

Die geodätische Linie zwischen zwei Punkten eines rechtwinklig-sphäroidischen Coordinatensystems und die Richtungen derselben an den beiden Endpunkten, orientiert nach der Nordrichtung der Abscissenaxe, kann man aber für die Praxis bequemer auch unmittelbar aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten dieser beiden Punkte

*) Die Berechnung dieses Beispiels ist bis zur Bestimmung von s^m, α und α_1 mit den unter 1) bis 9) gegebenen Formeln des §. 25. ausgeführt, jedoch mit den infolge der geringeren Entfernung der beiden Punkte von einander erlaubten Vereinfachungen. Daher stimmt auch das Schema nicht genau mit dem des Beispiels 5. überein.

**) Siehe Seite 59. Zeile 5 bis 10 v. o.

berechnen. Dabei verlässt man aber den streng wissenschaftlichen Weg und schafft nur Näherungswerte, die jedoch, den Zwecken entsprechend, hinlängliche Genauigkeit besitzen. Dagegen gewährt diese Berechnungsmethode den Vorteil, dass man ohne wesentliche Veränderung, d. h. mit sich von selbst ergebender Vereinfachung in dem Verfahren, bei dem Näheraneinanderrücken der Punkte allmählig aus dem sphäroidischen in ein sphärisches und schliesslich in ein ebenes, rechtwinkliges Coordinatensystem hinübergeführt wird. In dem folgenden Paragraphen soll die Entwickelung dieser Methode gegeben werden.

§. 30. Berechnung der geodätischen Linie $PP_1 = s^m$ und ihrer Richtungen ϱ und ϱ_1 aus den gegebenen rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten x^m, y^m und x_1^m, y_1^m der Punkte P und P_1.

Fig. 14. Bei den folgenden Untersuchungen wird die Erde als eine Kugel vom Radius $\sqrt{RN}$ vorausgesetzt, welcher der Fläche des betreffenden Dreiecks angehört.

Es sei WAO der Äquator, SAN der Meridian des Nullpunktes P_0, und demnach Abscissenaxe des rechtwinklig-sphärischen Coordinatensystems, ferner N der Nordpol, O der im Äquator von A um 90° nach Osten abstehende Durchschnittspunkt der Ordinatenaxe P_0O und aller auf SAN senkrechten Querschnitte (Vergl. §. 15., Seite 38 und 39). Dasselbe gilt in den beiden negativen Richtungen AS und AW vom Südpole und dem westlichen Durchschnittspunkte im Äquator. Sind nun P und P_1 zwei geodätische Punkte innerhalb des Geltungsbereiches des eben festgestellten rechtwinklig-sphärischen Coordinatensystems, PN, P_1N ihre Meridiane, OPF, OP_1F_1 die durch P und P_1 auf die Abscissenaxe gezogenen senkrechten Querschnitte, sind ferner pP, p_1P_1 der Abscissenaxe, p_2P_1 dem Meridiane von P parallele Bogen, und ist $PP_1 = s^m$ die geodätische Linie zwischen P und P_1, so folgt, dass $P_0F = x^m$ die Abscisse, $PF = y^m$ die Ordinate des Punktes P, $P_0F_1 = x_1^m$ die Abscisse, $P_1F_1 = y_1^m$ die Ordinate des Punktes P_1, $NPp = \gamma$, $NP_1p_1 = \gamma_1$ die Meridianconvergenzen in den Punkten P und P_1 gegen die Abscissenaxe, $NP_1p_2 = \gamma_2$ die Meridianconvergenz im Punkte P_1 gegen den Meridian von P, $NPP_1 = \alpha$, der convexe Winkel $NP_1P = \alpha_1$ die Azimute, $pPP_1 = \varrho$ und der convexe Winkel $p_1P_1P = \varrho_1$ die Richtungen der geodätischen Linie s^m in den Endpunkten P und P_1 sind. Nach der §. 23., Seite 68, festgestellten Bezeichnungsweise hat man für die in Metermass ausgedrückten Bogen s^m, x^m, y^m, x_1^m, y_1^m, $x_1^m - x^m = \Delta x^m$, $y_1^m - y^m = \Delta y^m$, welche man mit hinlänglicher Genauigkeit auf einen gemeinschaftlichen mittleren Krümmungsradius $\sqrt{RN}$ für das Argument $\frac{1}{2}(x_1 + x)$ beziehen darf, nur die hiernach sich ergebenden s, x, y, x_1, y_1, Δx, Δy zu setzen, um diese Bogen auf den Radius 1 zu reduzieren. Für das sphärische Dreieck PP_1O hat man hiernach folgende Ausdrücke für die Seiten und Winkel

$$PO = \tfrac{1}{2}\pi - y,\ P_1O = \tfrac{1}{2}\pi - y_1,\ PP_1 = s,\ \angle P_1PO = \tfrac{1}{2}\pi - \varrho,\ \angle OP_1P = \varrho_1 - \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\angle POP_1 = \Delta x,$$

und die §. 3. Seite 14 unter Nr. 15. und 16. aufgeführten beiden Gleichungen erhalten in bezug auf das vorliegende Dreieck die folgenden Formen

$$\cos y_1 \sin \Delta x = \sin s \cos \varrho, \qquad \textbf{15.}$$

$$\sin y_1 = \cos s \sin y + \sin s \cos y \sin \varrho. \qquad \textbf{16.}$$

Führt man in diese Gleichungen für die Sinus und Cosinus der Seiten die schon mehrfach angewendeten trigonometrischen Reihen §. 2., Seite 13, No. 13. ein, und beachtet, dass bei der Kleinheit von Δx, y, y_1 und s zwei Glieder der Reihen genügen,

und dass man bei ihrer Multiplication und Potenzierung die Glieder vierter Ordnung unbedenklich vernachlässigen darf, so erhält man für die erste Gleichung 15.

$$(1 - \tfrac{1}{2}\, y_1^2)\,(\Delta x - \tfrac{1}{6}\,(\Delta x)^3) = (s - \tfrac{1}{6}\, s^3) \cos \varrho,$$

und nach Auflösung der Parenthesen

$$s \cos \varrho = \Delta x + \tfrac{1}{6}\, s^3 \cos \varrho - \tfrac{1}{2}\, \Delta x\, y_1^2 - \tfrac{1}{6}\,(\Delta x)^3.$$

Multipliciert man diese Gleichung das eine Mal mit $\frac{1}{2} y_1^2$, erhebt sie das andere Mal auf die dritte Potenz und dividiert durch 6, so erhält man mit Vernachlässigung der Glieder höherer als dritter Ordnung

$$\tfrac{1}{2}\, \Delta x\, y_1^2 = \tfrac{1}{2}\, y_1^2\, s \cos \varrho,$$

$$\tfrac{1}{6}\,(\Delta x)^3 = \tfrac{1}{6}\, s^3 \cos^3 \varrho.$$

Diese Werte für die beiden letzten Glieder in die Gleichung wieder eingesetzt, giebt

$$s \cos \varrho = \Delta x + \tfrac{1}{6}\, s^3 \cos \varrho - \tfrac{1}{2}\, y_1^2\, s \cos \varrho - \tfrac{1}{6}\, s^3 \cos^3 \varrho$$

$$= \Delta x - \tfrac{1}{2}\, s \cos \varrho\, (y_1^2 - \tfrac{1}{3}\, s^2\, (1 - \cos^2 \varrho));$$

$$\text{a)}\quad s \cos \varrho = \Delta x - \tfrac{1}{2}\, s \cos \varrho\, (y_1^2 - \tfrac{1}{3}\, s^2 \sin^2 \varrho).$$

Für die zweite Gleichung 16. gestaltet sich die Umformung in folgender Weise:

$$y_1 - \tfrac{1}{6}\, y_1^3 = (1 - \tfrac{1}{2}\, s^2)\,(y - \tfrac{1}{6}\, y^3) + (s - \tfrac{1}{6}\, s^3)\,(1 - \tfrac{1}{2}\, y^2) \sin \varrho,$$

$$y_1 = y - \tfrac{1}{2}\, s^2\, y - \tfrac{1}{6}\, y^3 + s \sin \varrho - \tfrac{1}{6}\, s^3 \sin \varrho - \tfrac{1}{2}\, y^2\; s \sin \varrho + \tfrac{1}{6}\, y_1^3.$$

Erhebt man die letzte Gleichung auf die 3. Potenz und dividiert durch 6, so erhält man mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\tfrac{1}{6}\, y_1^3 = \tfrac{1}{6}\, y^3 + \tfrac{1}{6}\, s^3 \sin^3 \varrho + \tfrac{1}{2}\, y\, s^2 \sin^2 \varrho + \tfrac{1}{2}\, y^2\, s \sin \varrho.$$

Führt man diesen Wert für das letzte Glied in die Gleichung nunmehr ein, so folgt, wenn $y_1 - y = \Delta y$ gesetzt wird,

$$s \sin \varrho = \Delta y + \tfrac{1}{6}\, s^2\, (3\, y + s \sin \varrho) - \tfrac{1}{6}\, s^2 \sin^2 \varrho\, (3\, y + s \sin \varrho);$$

$$\text{b)}\quad s \sin \varrho = \Delta y + \tfrac{1}{6}\, s^2 \cos^2 \varrho\, (3\, y + s \sin \varrho).$$

Aus a) und b) folgen für die Verwendung in den letzten Gliedern auf der rechten Seite jeder dieser Gleichungen die hinlänglich genauen Näherungswerte $s \cos \varrho = \Delta x$, $s \sin \varrho = \Delta y$. Setzt man diese daher rechts für $s \cos \varrho$ und $s \sin \varrho$ an den betreffenden Stellen ein, so gehen die Gleichungen a) und b) in die folgenden über:

$$\text{c)}\quad s \cos \varrho = \xi_0 = \Delta x - \tfrac{1}{2}\, \Delta x\, y_1^2 + \tfrac{1}{6}\, \Delta x\, (\Delta y)^2,$$

$$\text{d)}\quad s \sin \varrho = \eta_0 = \Delta y + \tfrac{1}{6}\, (\Delta x)^2\, (3\, y + \Delta y) = \Delta y + \tfrac{1}{6}\, (\Delta x)^2\, (y_1 + 2\, y).$$

Multipliciert man endlich c) und d) mit $\sqrt{RN}$, was einfach dadurch geschieht, dass man in c) $s^m \cos \varrho$, ξ_0^m, Δx^m in d) $s^m \sin \varrho$, η_0^m, Δy^m, y^m und y_1^m setzt, und ferner in c) $y_1^2 = \frac{(y_1^m)^2}{RN}$, $(\Delta y)^2 = \frac{(\Delta y^m)^2}{RN}$, in d) $(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x^m)^2}{RN}$ einführt, so hat man schliesslich die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} s^m \cos \varrho = \xi_0^m = \Delta x^m - \Delta x^m\, (y_1^m)^2\, \frac{1}{2RN} + \Delta x^m\, (\Delta y^m)^2\, \frac{1}{6RN} = \Delta x^m - a^m + b^m, \\ s^m \sin \varrho = \eta_0^m = \Delta y^m + (\Delta x^m)^2\, (y_1^m + 2\, y^m)\, \frac{1}{6RN} = \Delta y^m + c^m. \end{aligned}\right\} \quad (74.)$$

Der Zahlenwert für $\log \frac{1}{2RN}$ wird aus Tafel I. der Spalte (6) mit Argument

$\frac{1}{2}(x_1 + x)$ oder $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi)$ entnommen, nämlich

$$\log \frac{1}{2RN} = (6)_{x_1x} = (6)_{\varphi_1\varphi},$$

während durch Addition des unter der Spalte stehenden, constanten Logarithmus 9,52288 — 10 zu $(6)_{x_1x}$

$$\log \frac{1}{6RN} = (6)^a_{x_1x} = (6)^a_{\varphi_1\varphi}$$

erhalten wird.

Für das rechtwinklig-sphärische Dreieck P_1PF_2', in welchem statt der Katheten ξ^m und η^m zum Zwecke der Excessberechnung mit hinlänglicher Genauigkeit die Grössen ξ_0^m und η_0^m benutzt werden können, hat man

$$\varepsilon'' = s^{m2} \cos \varrho \sin \varrho \frac{1}{2RN \sin 1''} = \xi_0^m \eta_0^m \frac{1}{2RN \sin 1''}, \tag{43.}$$

$$\log \varepsilon'' = \log (\xi_0^m \eta_0^m) + (3)_{x_1x}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{cotg} \varrho = \frac{\xi_0^m}{\eta_0^m} \text{ oder } \operatorname{tang} \varrho = \frac{\eta_0^m}{\xi_0^m}, \tag{75.}$$

und endlich

$$s^m = \frac{\xi_0^m}{\cos \varrho} = \frac{\eta_0^m}{\sin \varrho}. \tag{76.}$$

Die Katheten ξ^m und η^m aber ergeben sich aus den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi^m &= s^m \cos (\varrho - \tfrac{2}{3} \varepsilon), \\ \eta^m &= s^m \sin (\varrho - \tfrac{1}{3} \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{73.}$$

oder bequemer mit Umgehung der Excessberechnung nach den Formeln (48d.) und (50d.) auf Seite 90

$$\log \xi^m = \log \xi_0^m + (\tau)_{s^m} - (\tau)_{\xi_0^m}, \tag{48d.}$$

$$\log \eta^m = \log \eta_0^m - (\sigma)_{s^m} + (\sigma)_{\eta_0^m}. \tag{50d.}$$

In den meisten Fällen werden indes die Unterschiede zwischen ξ^m, η^m und ξ_0^m, η_0^m vernachlässigt werden können.

Um die Richtung ϱ_1 der geodätischen Linie s^m im Punkte P_1 zu erhalten, hat man zunächst den Excess E des sphärischen Vierecks P_1PFF_1 zu bestimmen, nämlich:

$$E'' = \Delta x^m (y_1^m + y^m) \cdot \frac{1}{2RN \sin 1''}, \qquad \text{nach 25a.}$$

und alsdann zu setzen

$$\varrho_1 = 180° + \varrho - E''. \tag{77.}$$

Die Richtung ϱ_1 wird übrigens nur für die Übertragung der Richtung auf eine andere im Punkte P_1 anstossende Seite benutzt.

Die vier Winkel in dem Vierecke P_1PFF_1 betragen zusammen $360° + E''$; diese Summe verteilt sich auf die Winkel in folgender Weise, wenn man für ϱ und ϱ_1 das Azimut α einführt,

$$\begin{aligned} \angle F + \angle F_1 &= 180° \\ \angle P_1 &= 90° - \alpha + \gamma_1 - \gamma_2 + \varepsilon \\ \angle P &= 90° + \alpha - \gamma \\ \hline 360° + E'' &= 360° - \gamma + \gamma_1 - \gamma_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

oder

$$E'' = -\gamma + \gamma_1 - \gamma_2 + \varepsilon,$$

in Übereinstimmung mit der in §. 28. unter (72.) gegebenen Richtungsdifferenz.

11. Beispiel. Berechnung der geodätischen Linie s^m und ihrer Richtungen ϱ und ϱ_1 zwischen denselben Punkten P und P_1 wie in Beispiel 10., diesmal aus den durch die Beispiele 7. und 8. gegebenen rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten dieser Punkte: x^m, y^m und x_1^m, y_1^m.

P = Berger Warte, Turm; P_1 = Frankfurt, Katharinenturm.

$x_1^m = -133597{,}^m071$		$\log \Delta x^m = 3{,}70886n$
$-x^m = +128481{,}963$		$\log y_1^{m2} = 9{,}53819$
$\Delta x^m = -\ 5115{,}^m108$	$\log \xi_0^m = 3{,}7088364.3n$	$(6)_{x_1x} = 6{,}08917$
$-a^m = +\ 0{,}2169$	$(\tau)_{s^m} - (\tau)_{\xi_0^m} = +\ 0.6$	$\log a^m = 9{,}33622n$
$b^m = -\ 0{,}0004$	$\log \xi^m = 3{,}7088364.9n$	
$\xi_0^m = -\ 5114{,}^m892$	$\xi^m = -5114{,}^m893$	$\log \Delta x^m = 3{,}70886n$
		$\log (\Delta y^m)^2 = 7{,}26260$
$y_1^m = -58761{,}^m808$		$(6)^a_{x_1x} = 5{,}61205$
$-y^m = +54483{,}185$	$\log \eta_0^m = 3{,}6313058.4n$	$\log b^m = 6{,}58351n$
$\Delta y^m = -\ 4278{,}^m623$	$(\sigma)_{\eta_0^m} - (\sigma)_{s^m} = -\ 0.5$	
$c^m = -\ 0{,}018$	$\log \eta^m = 3{,}6313057.9n$	$y_1^m + y^m = -113245^m$
$\eta_0^m = -\ 4278{,}^m641$	$\eta^m = -4278{,}^m641$	$y_1^m + 2\,y^m = -167728^m$
$\log \eta_0^m = 3{,}6313058.4n$		$\log (\Delta x^m)^2 = 7{,}41772$
cpl $\log \xi_0^m = 6{,}2911635.7n$	$\varrho = 219^\circ\ 54'\ 45{,}''750$	$\log (y_1^m + 2y^m) = 5{,}22460n$
$\log \operatorname{tang} \varrho = 9{,}9224694.1$	$180^\circ - E = 179^\circ\ 59'\ 58{,}''533$	$(6)^a_{x_1x} = 5{,}61205$
	$\varrho_1 = 39^\circ\ 54'\ 44{,}''283$	$\log c^m = 8{,}25437n$
$\log \eta_0^m = 3{,}6313058.4n$		
cpl $\log \sin \varrho = 0{,}1927222.7n$	$s^m = 6668{,}^m499$	$\log \Delta x^m = 3{,}70886n$
$\log s^m = 3{,}8240281.1$		$\log (y_1^m + y^m) = 5{,}05402n$
		$(3)_{x_1x} = 1{,}40367$
		$\log E'' = 0{,}16655$
		$E'' = 1{,}''467$

Eine Vergleichung der hier gefundenen Resultate mit den in Beispiel 10. errechneten genauen Werten ergiebt folgende Differenzen:

	Genaue Resultate.	Genäherte Resultate.	Differenzen.
s^m	$6668{,}^m505$	$6668{,}^m499$	$+0{,}^m006$
ξ^m	$-5114{,}^m892$	$-5114{,}^m893$	$+0{,}^m001$
η^m	$-4278{,}^m651$	$-4278{,}^m641$	$-0{,}^m010$
ϱ	$219^\circ\ 54'\ 45{,}''997$	$219^\circ\ 54'\ 45{,}''750$	$+0{,}''247$
ϱ_1	$39^\circ\ 54'\ 44{,}''529$	$39^\circ\ 54'\ 44{,}''283$	$+0{,}''246.$

Die nach den Formeln dieses Paragraphen aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten von zwei Punkten P und P_1 berechnete geodätische Linie $PP_1 = s^m$ wird in der Regel als Grundlinie eines sphärischen oder ebenen Dreiecksnetzes niederer Ordnung benutzt. Es liegt daher im Interesse des Geodäten, die Richtigkeit dieser Linie vor ihrer weiteren Verwendung einer Controle zu unterziehen. Dazu bietet nun zwar die genaue Berechnungsmethode des §. 29., welche auch zugleich die Richtungen giebt, die geeignetsten Mittel; dieselbe ist aber als blosse Controlrechnung zu umständlich.

Will man nur die Seite controlieren, so thut in den meisten Fällen eine Berechnung mit Anwendung desselben Argumentes für die beiden Krümmungsradien R und N die gleichen Dienste. Die folgende, in dieser Weise geführte Berechnung ist anwendbar bis $s^m = 15000^m$, giebt aber auch noch bis zu $s^m = 30000^m$, wo die Differenz erst $0,^m16$ beträgt, brauchbare Resultate.

Sind P und P_1 durch ihre geographischen Coordinaten gegeben, so kann man den Breitenunterschied b 1) auf dem Meridian von P, 2) auf dem Meridian von P_1 bestimmen, ebenso das Perpendikel p 1) von P_1, 2) von P auf den gegenüberliegenden Meridian fällen. Darnach hat man

$$
\begin{array}{lll}
1)\ b = (\varphi_1 - \varphi) + \psi & & \operatorname{tang} p = \operatorname{tang} l \cos(\varphi_1 + \psi) \\
2)\ b_1 = (\varphi_1 - \varphi) - \psi_1 & \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi); & \operatorname{tang} p_1 = \operatorname{tang} l \cos(\varphi + \psi_1) \\
\hline
\text{Mittel: } b_2 = (\varphi_1 - \varphi) - \frac{1}{2}(\psi_1 - \psi); & \psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi); & \operatorname{tang} p_2 = \operatorname{tang} l \cos(\varphi_2 + \psi_2).
\end{array}
$$

$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)$ darf unbedenklich unberücksichtigt bleiben, φ_2 ist das Argument für die mittleren Krümmungsradien und $\log \psi_2'' = \log l''^2 + (5)_{\varphi_2}$. Die weitere Berechnung geschieht durch die folgenden logarithmischen Gleichungen, wobei die Tangenten von p_2 und l mit den Bogen vertauscht sind, was innerhalb der angegebenen Grenze gestattet ist.

$$\log b_2^m = \log b_2'' + (1)_{\varphi_2},$$
$$\log p_2^m = \log l'' + \log\cos(\varphi_2 + \psi_2) + (2)_{\varphi_2},$$
$$\log \operatorname{cotg} \omega = \log b_2^m + \operatorname{cpl} \log p_2^m,$$
$$\log s^m = \log p_2^m + \operatorname{cpl} \log \sin \omega.$$

Ist s^m nur wenige Kilometer lang, so darf auch ψ_2 vernachlässigt werden. Will man endlich die Berechnung ohne den Hülfswinkel ω ausführen, so kann dieses mit Anwendung der folgenden, übrigens für die numerische Berechnung höchst unbequemen Formel geschehen.

$$s^m = \sqrt{(b'' R_{\varphi_2} \sin 1'')^2 + (l'' \cos(\varphi_2 + \psi_2) \cdot N_{\varphi_2} \sin 1'')^2}.$$

12. Beispiel. Controlrechnung für die im 11. Beispiel gefundene geodätische Linie $PP_1 = s^m$ nach den im 10. Beispiele gegebenen geographischen Coordinaten.

$$
\begin{array}{llll}
\varphi = 50^\circ\ 9'\ 38,''740 & \varphi_2 = 50^\circ\ 8'\ 15,''221 & \lambda = 26^\circ\ 24'\ 11,''330 & \log l''^2 = 4,65579 \\
\varphi_1 = 50^\circ\ 6'\ 51,''701 & \psi_2 = 0,''054 & \lambda_1 = 26^\circ\ 20'\ 38,''567 & (5)_{\varphi_2} = 4,07767^{*)} \\
\hline
b_2'' = -\ 167,''039 & \varphi_2 + \psi_2 = 50^\circ\ 8'\ 15,''275 & l'' = -\ 212,''763 & \log \psi_2 = 8,73346
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlcrl}
\log l'' = & 2,3278961n & & \log b_2'' = & 2,2228179n \\
\log\cos(\varphi_2 + \psi_2) = & 9,8068217 & & (1)_{\varphi_2} = & 1,4898467^{*)} \\
(2)_{\varphi_2} = & 1,4910295^{*)} & & \log b_2^m = & 3,7126646n \\
\log p_2^m = & 3,6257473n & & \operatorname{cpl}\log p_2^m = & 6,3742527n \\
\operatorname{cpl}\log\sin\omega = & 0,1982937n & & \log\operatorname{cotg}\omega = & 0,0869173 \\
-\operatorname{const} = & -\ 125^{**)} & & & \\
\log s^m = & 3,8240285 & & & \\
= & 3,8240285.4 \text{ nach dem 10. Beispiel.} & & & \\
= & 3,8240281.1 \quad „ \quad „ \quad 11. \quad „ & & &
\end{array}
$$

*) Tafel I. A.
**) Siehe Seite 59, Zeile 5 bis 10 v. o.

C. Rechtwinklig-sphärische Coordinaten.

§. 31. Berechnung der Seiten und ihrer Richtungen, sowie der rechtwinklig-sphärischen Coordinaten der Eckpunkte P_2, P_3 … eines Dreiecksnetzes, welchem die aus den rechtwinklig-sphäroidischen Coordinaten x^m, y^m und x_1^m, y_1^m und den zugehörigen Katheten ξ^m, η^m abgeleitete geodätische Linie $PP_1 = s^m$ als Grundlinie und deren Richtungen ϱ und ϱ_1 zur Orientierung dienen.

Da nach dem vorhergehenden Paragraphen zur Berechnung der Seite PP_1 und ihrer Richtungen ein einziger gemeinschaftlicher mittlerer Krümmungsradius — also ein Kugelradius $\sqrt{RN}$ — verwendet wurde, so kann das darangeknüpfte, aus Dreiecken niederer Ordnung gebildete Netz nur als ein sphärisches behandelt werden, wenn nicht schon jetzt die Kürze der Seite s^m und ihr unmittelbarer Anschluss an ein Netz letzter Ordnung eine Berechnung in der Ebene gestattet. Hiernach richtet sich auch die der Coordinatenberechnung vorhergehende Dreiecksberechnung und Ausgleichung. Auch kann das Netz an mehrere Seiten als Grundlinien angeschlossen werden.

Bezeichnen nun $s^m_{\cdot 2}$, $s^m_{1\cdot 2}$, $s^m_{2\cdot 3}$ …, $\xi^m_{\cdot 2}$, $\xi^m_{1\cdot 2}$, $\xi^m_{2\cdot 3}$ …, $\eta^m_{\cdot 2}$, $\eta^m_{1\cdot 2}$, $\eta^m_{2\cdot 3}$ …, $\varrho_{\cdot 2}$, $\varrho_{2\cdot}$, $\varrho_{1\cdot 2}$, $\varrho_{2\cdot 1}$, $\varrho_{2\cdot 3}$, $\varrho_{3\cdot 2}$ … die den Punktpaaren PP_2, P_1P_2, P_2P_3 … entsprechenden, in ihrer allgemeinen Bezeichnungsweise mit den vorhergehenden, gleichartigen Ausdrücken übereinstimmenden Bogen und Richtungen, sind also in dem an der Grundlinie $PP_1 = s^m$ liegenden Dreiecke PP_1P_2 aus der Netzberechnung die Seiten $s^m_{\cdot 2}$, $s^m_{1\cdot 2}$ und die Richtungen

$$\varrho_{\cdot 2} = \varrho \pm \angle P, \quad \varrho_{1\cdot 2} = \varrho_1 \mp \angle P_1$$

bekannt, so hat man weiter, wie folgt, zu verfahren.

$$\varepsilon''_{\cdot 2} = s^{m\,2}_{\cdot 2} \sin \varrho_{\cdot 2} \cos \varrho_{\cdot 2} \cdot \frac{1}{2\,RN \sin 1''}; \qquad (43.)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi^m_{\cdot 2} &= s^m_{\cdot 2} \cos (\varrho_{\cdot 2} - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon_{\cdot 2}); \\ \eta^m_{\cdot 2} &= s^m_{\cdot 2} \sin (\varrho_{\cdot 2} - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{\cdot 2}); \end{aligned}\right\} \quad (73.)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^m &= x^m + \xi^m_{\cdot 2} + \xi^m_{\cdot 2}(y^m + \eta^m_{\cdot 2})^2 \frac{1}{2\,RN} - \xi^m_{\cdot 2}(\eta^m_{\cdot 2})^2 \frac{1}{6\,RN} = x^m + \xi^m_{\cdot 2} + a^m_{\cdot 2} - b^m_{\cdot 2}; \\ y_2^m &= y^m + \eta^m_{\cdot 2} - (\xi^m_{\cdot 2})^2 (3y^m + \eta^m_{\cdot 2}) \frac{1}{6\,RN} = y^m + \eta^m_{\cdot 2} - c^m_{\cdot 2}; \end{aligned}\right\} \quad (74.)$$

$$E''_{\cdot 2} = \xi^m_{\cdot 2}\,(2\,y^m + \eta^m_{\cdot 2}) \frac{1}{2\,RN \sin 1''}; \qquad \text{nach 25a.}$$

$$\varrho_{2\cdot} = 180^\circ + \varrho_{\cdot 2} - E''_{\cdot 2}. \qquad (77.)$$

$$\varepsilon''_{1\cdot 2} = s^{m\,2}_{1\cdot 2} \sin \varrho_{1\cdot 2} \cos \varrho_{1\cdot 2} \cdot \frac{1}{2\,RN \sin 1''}; \qquad (43.)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi^m_{1\cdot 2} &= s^m_{1\cdot 2} \cos (\varrho_{1\cdot 2} - \tfrac{2}{3}\,\varepsilon_{1\cdot 2}); \\ \eta^m_{1\cdot 2} &= s^m_{1\cdot 2} \sin (\varrho_{1\cdot 2} - \tfrac{1}{3}\,\varepsilon_{1\cdot 2}); \end{aligned}\right\} \quad (73.)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2^m &= x_1^m + \xi^m_{1\cdot 2} + \xi^m_{1\cdot 2}\,(y_1^m + \eta^m_{1\cdot 2})^2 \frac{1}{2\,RN} - \xi^m_{1\cdot 2}\,(\eta^m_{1\cdot 2})^2 \frac{1}{6\,RN}; \\ &= x_1^m + \xi^m_{1\cdot 2} + a^m_{1\cdot 2} - b^m_{1\cdot 2}; \\ y_2^m &= y_1^m + \eta^m_{1\cdot 2} - (\xi^m_{1\cdot 2})^2\,(3\,y_1 + \eta^m_{1\cdot 2}) \frac{1}{6\,RN} = y_1^m + \eta^m_{1\cdot 2} - c^m_{1\cdot 2}; \end{aligned}\right\} \quad (74.)$$

$E''_{1\cdot 2} = \xi^{m}_{1\cdot 2}\,(2\,y^{m}_{1} + \eta^{m}_{1\cdot 2})\,\frac{1}{2\,RN \sin 1''}$; nach 25a.

$\varrho_{2\cdot 1} = 180^{\circ} + \varrho_{1\cdot 2} - E''_{1\cdot 2}$; (77.)

$= \varrho_{2.} \pm \angle P_2$.

In der vorstehenden Formelzusammenstellung erhält man x^{m}_{2} und y^{m}_{2} zweimal, und zwar auf verschiedenen Wegen, und ferner eine Prüfung der Richtungen $\varrho_{2.}$ und $\varrho_{2\cdot 1}$ durch den Winkel PP_2P_1.

Hierauf geht man zu dem folgenden Dreiecke über u. s. f., bis alle Punkte des Netzes durch rechtwinklig-sphärische Coordinaten und die Richtungen sämtlicher Seiten bestimmt sind.

In dem folgenden Beispiele ist von einer Seite ausgegangen, welche schon in den Beispielen 10., 11. und 12. behandelt wurde und von dem Nullpunkte des Coordinatensystemes möglichst weit absteht, um nachzuweisen, dass die nach den gegebenen Formeln ausgeführten Berechnungen bis an die Grenzen des Geltungsbereiches des Coordinatensystems zuverlässige Resultate geben.

13. Beispiel. Berechnung der rechtwinklig-sphärischen Coordinaten x_2^{m}, y_2^{m} des Punktes P_2 winklig-sphäroidischen Coordinaten x^{m}, y^{m} des Punktes P, ebenso des

P = Berger Warte, Turm; P_1 = Frankfurt,

P = 43° 15′ 9,″573	$\log s^{m}_{1\cdot 2}$ = 3,7581918.1
P_1 = 83° 52′ 0,″887	„ $s^{m}_{\cdot 2}$ = 3,9198709.4
P_2 = 52° 52′ 49,″636	„ s^{m} = 3,8240281.1
180° 0′ 0,″096	

$\log s^{m}_{\cdot 2}$ = 3,9198709.4	$\log s^{m2}_{\cdot 2}$ = 7,83974	$\log \xi^{m}_{\cdot 2}$ = 2,99543n
$\text{l.}\cos(\varrho_{\cdot 2} - \frac{2}{3}\varepsilon_{\cdot 2})$ = 9,0755623.2n	$\log \sin \varrho_{\cdot 2}$ = 9,99690n	$\log \eta^{m2}_{\cdot 2}$ = 7,83355
$\text{l.}\sin(\varrho_{\cdot 2} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\cdot 2})$ = 9,9969027.8n	$\log \cos \varrho_{\cdot 2}$ = 9,07556n	$(6)^{a}$ = 5,61205
$\log \xi_{\cdot 2}$ = 2,9954332.6n	(3) = 1,40367	$\log b^{m}_{\cdot 2}$ = 6,44103n
$\log \eta^{m}_{\cdot 2}$ = 3,9167737.2n	$\log \varepsilon''_{\cdot 2}$ = 8,31587	
	$\varepsilon''_{\cdot 2}$ = 0,″021	$\log \xi^{m2}_{\cdot 2}$ = 5,99087
x^{m} = −128481,m963		$\log(3y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2})$ = 5,23479n
$\xi^{m}_{\cdot 2}$ = − 989,m540	$y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2}$ = − 62739m	$(6)^{a}$ = 5,61205
$a^{m}_{\cdot 2}$ = − 0,m048	$2\,y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2}$ = −117222m	$\log c^{m}_{\cdot 2}$ = 6,83771n
$-b^{m}_{\cdot 2}$ = + 0,m000	$3\,y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2}$ = −171706m	
x^{m}_{2} = −129471,m551		$\log \xi^{m}_{\cdot 2}$ = 2,99543n
	$\log \xi^{m}_{\cdot 2}$ = 2,99543n	$\log(2\,y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2})$ = 5,06901n
y^{m} = − 54483,m185	$\log(y^{m} + \eta^{m}_{\cdot 2})^2$ = 9,59506	(3) = 1,40367
$\eta^{m}_{\cdot 2}$ = − 8256,m077	(6) = 6,08917	$\log E''_{\cdot 2}$ = 9,46811
$-c^{m}_{\cdot 2}$ = + 0,m001	$\log a^{m}_{\cdot 2}$ = 8,67966n	$E''_{\cdot 2}$ = 0,″294
y_2^{m} = − 62739,m261		
$180° + \varrho_{\cdot 2}$ = 83° 9′ 55,″323		
$-E''_{\cdot 2}$ = − 0,″294		
$\varrho_{2.}$ = 83° 9′ 55,″029		
$\angle P_2$ = 52° 52′ 49,″636		
$\varrho_{2\cdot 1}$ = 136° 2′ 44,″665		

D. Rechtwinklige, ebene Coordinaten.

§. 32. Berechnung der trigonometrischen Detailvermessung.

Das an eine oder mehrere Seiten eines sphärischen Netzes vierter Ordnung sich anschliessende Detailnetz, als Netz letzter Ordnung, enthält nur ebene Dreiecke, und die Coordinaten der Netzpunkte werden als rechtwinklig-ebene berechnet. Die letzteren treten unter der nachfolgenden einfachen Form auf, worin die Grössen a^m, b^m, c^m, E'' und ε'' verschwunden sind. Behält man die Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen bei, d. h. geht man von dem ersten Dreieck PP_1P_2, den Seiten s, $s_{\cdot 2}$, $s_{1\cdot 2}$, den Richtungen ϱ, ϱ_1, $\varrho_{\cdot 2}$, $\varrho_{1\cdot 2}$ und den Coordinaten x^m, y^m und x^m_1, y^m_1 der Punkte P und P_1 aus, so hat man

$$\left.\begin{aligned} \Delta x^m_{\cdot 2} &= s^m_{\cdot 2} \cos \varrho_{\cdot 2}; & \Delta x^m_{1\cdot 2} &= s^m_{1\cdot 2} \cos \varrho_{1\cdot 2}; \\ \Delta y^m_{\cdot 2} &= s^m_{\cdot 2} \sin \varrho_{\cdot 2}; & \Delta y^m_{1\cdot 2} &= s^m_{1\cdot 2} \sin \varrho_{1\cdot 2}; \end{aligned}\right\} \quad (73a.)$$

Fortsetzung auf Seite 104.

---

aus der gegebenen geodätischen Linie $PP_2 = s^m_{\cdot 2}$, ihrer Richtung $\varrho_{\cdot 2}$ in P, und den recht-
Punktes P_2 von P_1 aus mit den gegebenen Stücken $s^m_{1\cdot 2}$, $\varrho_{1\cdot 2}$, $x_1{}^m$, $y_1{}^m$.

Katharinenturm; P_2 = Praunheim, Kirchturm.

$\varrho = 219°\ 54'\ 45,''750$	$\varrho_1 = 39°\ 54'\ 44,''283$
$\angle P = 43°\ 15'\ 9,''573$	$\angle P_1 = 83°\ 52'\ 0,''887$
$\varrho_{\cdot 2} = 263°\ 9'\ 55,''323$	$\varrho_{1\cdot 2} = 316°\ 2'\ 43,''396$

$\log s^m_{1\cdot 2} = 3{,}7581918.1$	$\log s^{m2}_{1\cdot 2} = 7{,}51638$	$\log \xi^m_{1\cdot 2} = 3{,}61546$
$\text{l.}\cos(\varrho_{1\cdot 2} - \frac{2}{3}\varepsilon_{1\cdot 2}) = 9{,}8572661.5$	$\log \sin \varrho_{1\cdot 2} = 9{,}84142n$	$\log \eta^{m2}_{1\cdot 2} = 7{,}19921$
$\text{l.}\sin(\varrho_{1\cdot 2} - \frac{1}{3}\varepsilon_{1\cdot 2}) = 9{,}8414146.7n$	$\log \cos \varrho_{1\cdot 2} = 9{,}85727$	$(6)^a = 5{,}61205$
$\log \xi^m_{1\cdot 2} = 3{,}6154579.6$	$(3) = 1{,}40367$	$\log b^m_{1\cdot 2} = 6{,}42672$
$\log \eta^m_{1\cdot 2} = 3{,}5996064.8n$	$\log \varepsilon''_{1\cdot 2} = 8{,}61874n$	
	$\varepsilon''_{1\cdot 2} = -0,''042$	$\log \xi^{m2}_{1\cdot 2} = 7{,}23091$
$x_1{}^m = -133597,^m071$		$\log(3\,y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2}) = 5{,}25591n$
$\xi^m_{1\cdot 2} = +\ 4125,^m323$	$y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2} = -\ 62739^m$	$(6)^a = 5{,}61205$
$a^m_{1\cdot 2} = +\ 0,^m199$	$2\,y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2} = -121501^m$	$\log c^m_{1\cdot 2} = 8{,}09887n$
$-b^m_{1\cdot 2} = -\ 0,^m000$	$3\,y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2} = -180262^m$	
$x_2{}^m = -129471,^m549$		$\log \xi^m_{1\cdot 2} = 3{,}61546$
	$\log \xi^m_{1\cdot 2} = 3{,}61546$	$\log(2\,y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2}) = 5{,}08458n$
$y_1{}^m = -\ 58761,^m808$	$\log(y_1{}^m + \eta^m_{1\cdot 2})^2 = 9{,}59506$	$(3) = 1{,}40367$
$\eta^m_{1\cdot 2} = -\ 3977,^m466$	$(6) = 6{,}08917$	$\log E''_{1\cdot 2} = 0{,}10371n$
$-c^m_{1\cdot 2} = +\ 0,^m013$	$\log a^m_{1\cdot 2} = 9{,}29969$	$E''_{1\cdot 2} = -1,''270$
$y_2{}^m = -\ 62739,^m261$		
$180° + \varrho_{1\cdot 2} = 136°\ 2'\ 43,''396$		
$-E''_{1\cdot 2} = +\ 1,''270$		
$\varrho_{2\cdot 1} = 136°\ 2'\ 44,''666.$		

$$\left.\begin{aligned} x_2^m &= x^m + \Delta x^m_{\cdot 2} = x_1^m + \Delta x^m_{1\cdot 2}; \\ y_2^m &= y^m + \Delta y^m_{\cdot 2} = y_1^m + \Delta y^m_{1\cdot 2}; \end{aligned}\right\} \quad (74a.)$$

$$\varrho_{2\cdot} = 180^\circ + \varrho_{\cdot 2}; \qquad \varrho_{2\cdot 1} = 180^\circ + \varrho_{1\cdot 2}; \quad (77a.)$$

$$\varrho_{2\cdot 1} - \varrho_{2\cdot} = \angle P_2.$$

Ferner ist, wenn die rechtwinklig-ebenen Coordinaten x^m, y^m und x_1^m, y_1^m der Punkte P und P_1 gegeben sind, und die Strecke s^m und ihre Richtungen ϱ, ϱ_1 gesucht werden,

$$s^m = \sqrt{(x_1^m - x^m)^2 + (y_1^m - y^m)^2},$$

oder

$$\frac{x_1^m - x^m}{y_1^m - y^m} = \frac{\Delta x^m}{\Delta y^m} = \operatorname{cotg} \varrho \text{ oder } \frac{y_1^m - y^m}{x_1^m - x^m} = \frac{\Delta y^m}{\Delta x^m} = \operatorname{tang} \varrho; \quad (75a.)$$

$$s^m = \frac{\Delta x^m}{\cos \varrho} = \frac{\Delta y^m}{\sin \varrho}; \quad (76a.)$$

$$\varrho_1 = 180^\circ + \varrho. \quad (77a.)$$

E. Rechtwinklig-ebene Coordinaten, dargestellt durch Projection auf abwickelbare Flächen.

§. 33. Vorbemerkung.

Ausser den rechtwinklig-sphäroidischen bezw. sphärischen Coordinaten, welche erst bei den trigonometrischen Detailvermessungen in rechtwinklig-ebene Coordinaten übergehen, bestehen in Deutschland noch zwei Coordinatensysteme, welche von vornherein die Bestimmungen der geodätischen Punkte in rechtwinklig-ebenen Coordinaten geben. Es sind dieses die Ergebnisse der hannoverschen und mecklenburgischen Landesvermessungen. Aus den in der Einleitung, Seite 2 und 3 und weiter Seite 18, 57 und 58 gegebenen Notizen ist zu ersehen, dass beide Systeme durch conforme Abbildung des Erdsphäroides auf einen Cylinder- bezw. Kegelmantel, und durch Abwickelung dieser Flächen auf eine Ebene rechtwinklig-ebene Coordinaten geben. In den beiden nachfolgenden Paragraghen sind die Berechnungsformeln dieser Systeme für den praktischen Gebrauch zusammengestellt; wegen Ableitung derselben wird aber auf die bereits früher angeführten Werke verwiesen.

§. 34. Die Projectionsmethode von Gauss und die hannoversche Landesvermessung.

Als Nullpunkt des Coordinatensystems gilt der Mittelpunkt der Axe des Reichenbachschen Meridiankreises in der Göttinger Sternwarte, dessen geographischen Coordinaten nach Gauss sind:

$$\varphi_0 = 51^\circ\ 31'\ 47,''85 \text{ nördl.}; \ \lambda_0 = 27^\circ\ 36'\ 28,''2 \text{ ö. v. Fo.}$$

Die Fläche, auf welche nach einer Gauss eigentümlichen Methode die geodätischen Punkte der hannoverschen Landesvermessung projiciert sind, ist ein Cylindermantel*), welcher den Meridian des Nullpunktes als senkrechten Querschnitt hat. Dieser

*) So kann die Sache der grösseren Klarheit wegen wenigstens aufgefasst werden, wenn auch die mathematischen Ableitungen dieser Projectionsmethode direkt die Abbildung des Sphäroides auf die Ebene geben.

Meridian ist zugleich Abscissenaxe, und zwar werden die Abscissen südlich vom Nullpunkte positiv, nördlich negativ gezählt. Die Ordinatenaxe — eine Seite des Cylinders — steht im Nullpunkte senkrecht auf der Abscissenaxe, mit positiv westlicher und negativ östlicher Richtung. Die Südrichtung der Abscissenaxe ist die Anfangsrichtung der Azimute im Nullpunkte. Dieselben werden über Westen gezählt. Breitet man nun den Cylindermantel in eine Ebene aus, so erhält man das rechtwinklig-ebene Coordinatensystem der hannoverschen Landesvermessung.

Aus der ursprünglichen Gestalt und Lage der Projectionsfläche geht hervor, dass alle Punkte in der Abscissenaxe, aber auch nur diese, die wahren Abstände vom Nullpunkte haben, während das Vergrösserungsverhältnis für ein Flächenelement auf der Ebene zu dem entsprechenden auf Sphäroide um so grösser wird, je weiter dasselbe von der Abscissenaxe abliegt.

Die nachfolgenden Formeln und zum Teil auch der Text sind dem von Th. Wittstein zum Zwecke der Grundsteuerveranlagung herausgegebenen, inhaltreichen Werkchen „Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844. Hannover 1868“ entnommen, und haben nur insofern eine Änderung erlitten, als man, wo nötig, die Signaturen mit denen der vorhergehenden Entwickelungen und Formeln des 2. und 3. Abschnittes in Übereinstimmung brachte und solche Umformungen vornahm, dass bei der Berechnung die Tafel I. des vierten Abschnittes verwendet werden kann. Hierdurch wird zugleich ohne irgend bemerkbaren Fehler unmittelbar von den ursprünglich angewendeten Walbeckschen zu den Besselschen Elementen übergegangen.

1.) Soll nach Tafel I. zu einem Punkte P_a in der Abscissenaxe, dessen Breite φ_a ist, das zugehörige q_a^m und umgekehrt φ_a aus q_a^m gefunden werden, und bezeichnet man die zunächst liegenden Tafelwerte mit φ_t, q_t^m, so dienen hierzu die beiden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} q_a^m &= q_t^m + (\varphi_a - \varphi_t)'' \, (R \sin 1'')_{\varphi_a \varphi_t}, \\ \varphi_a &= \varphi_t + (q_a^m - q_t^m) \frac{1}{(R \sin 1'')_{q_a^m \, q_t^m}}. \end{aligned}\right\} \text{nach (48b.)}$$

Für den Nullpunkt Göttingen des Coordinatensystems, dessen Breite $\varphi_0 = 51^\circ \; 31' \; 47,''85$ gegeben ist, hat man hiernach

$$q_0^m = + 5710458,^m471.$$

Zieht man von q_0^m die zwischen $50^\circ \; 30'$ und $54^\circ \; 30'$ liegenden Tafelwerte q^m ab, so erhält man für den Geltungsbereich der hannoverschen Landesvermessung die Abscissen x^m der als Argumente dienenden Tafelbreiten φ, und zwar südlich vom Nullpunkte $+ x^m$, nördlich aber $- x^m$. Die obigen Gleichungen gehen aber hiermit über in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x_a^m &= x_t^m + (\varphi_a - \varphi_t)'' \, (R \sin 1'')_{\varphi_a \varphi_t}, \\ \varphi_a &= \varphi_t + (x_a^m - x_t^m) \frac{1}{(R \sin 1'')_{x_a^m \, x_t^m}}. \end{aligned}\right\} \text{nach (48b.)}$$

2.) Um aus den geographischen Coordinaten φ und λ eines Punktes P auf dem Erdsphäroide die Abscisse x^m und die Ordinate y^m des entsprechenden Punktes p der Gaussischen Projection zu finden, dienen die folgenden Gleichungen, wenn man zugleich $l = \lambda_0 - \lambda$ setzt und in Secunden ausdrückt,

$$\left.\begin{aligned} x^{\mathrm{m}} &= x^{\mathrm{m}}_{a} - \tfrac{1}{2}\sin 1''\cdot \sin\varphi\cos\varphi\cdot l''^{2}\,(N\sin 1'')_{\varphi} + \tfrac{1}{24}\sin^{3} 1''\cdot\sin\varphi\cos\varphi\cdot l''^{4} \\ &\quad\cdot\left(1 - 6\cos^{2}\varphi - 9\,\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\cos^{4}\varphi - 4\left(\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\right)^{2}\cos^{6}\varphi\right)(N\sin 1'')_{\varphi}, \\ y^{\mathrm{m}} &= \cos\varphi\cdot l''\,(N\sin 1'')_{\varphi} - \tfrac{1}{6}\sin^{2} 1''\cos\varphi\cdot l''^{3}\left(1 - 2\cos^{2}\varphi - \frac{e^{2}}{1-e^{2}}\cos^{4}\varphi\right) \\ &\quad\cdot(N\sin 1'')_{\varphi}, \end{aligned}\right\}\ (78.)$$

oder zum Zwecke der logarithmischen Berechnung statt der Constanten unmittelbar deren Logarithmen eingesetzt,

$$\left.\begin{aligned} x^{\mathrm{m}} &= x^{\mathrm{m}}_{a} - [4{,}3845449 - 10]\sin\varphi\cos\varphi\cdot l''^{2}\,(N\sin 1'')_{\varphi} + [2{,}67651 - 20] \\ &\quad\cdot\sin\varphi\cos\varphi\cdot l''^{4}\,(1 - [0{,}77815]\cos^{2}\varphi - [8{,}78156 - 10]\cos^{4}\varphi - [6{,}25670 - 10] \\ &\quad\cdot\cos^{6}\varphi)\,(N\sin 1'')_{\varphi}, \\ y^{\mathrm{m}} &= \cos\varphi\cdot l''\,(N\sin 1'')_{\varphi} - [8{,}59300 - 20]\cos\varphi\cdot l''^{3}\,(1 - [0{,}30103]\cos^{2}\varphi \\ &\quad - [7{,}82732 - 10]\cos^{4}\varphi)\,(N\sin 1'')_{\varphi}. \end{aligned}\right\}\ (78\mathrm{a}.)$$

3.) **Um aus der Abscisse x^{m} und der Ordinate y^{m} eines Punktes p der Gaussischen Projection die geographischen Coordinaten φ und λ — $l'' = (\lambda_0 - \lambda)''$ — des entsprechenden Punktes P auf dem Erdsphäroide zu erhalten**, hat man die nachstehenden Formeln, in welchen $\varphi - \varphi_a$ und l in Secunden ausgedrückt, und durch vorherige Multiplication der letzten Glieder rechts mit $\frac{\sin^2 1''}{\sin^2 1''}$ Functionen der Tafel I. eingeführt werden.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_a - \operatorname{tang}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}2}\,\frac{1}{(2\,RN\sin 1'')_{\varphi_a}} + \tfrac{1}{12}\sin^{2} 1''\operatorname{tang}\varphi_a\sec^{2}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}4} \\ &\quad\cdot\left(3 + \left[2 - 9\,\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\right]\cos^{2}\varphi_a + 10\,\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\cos^{4}\varphi_a - 4\left(\frac{e^{2}}{1-e^{2}}\right)^{2}\cos^{6}\varphi_a\right) \\ &\quad\cdot\frac{1}{(2\,RN\sin 1'')_{\varphi_a}}\cdot\frac{1}{(N\sin 1'')^{2}_{\varphi_a}}, \\ l'' &= \sec\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{(N\sin 1'')_{\varphi_a}} - \tfrac{1}{6}\sin^{2} 1''\sec^{3}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}3} \\ &\quad\cdot\left(2 - \cos^{2}\varphi_a + \frac{e^{2}}{1-e^{2}}\cos^{4}\varphi_a\right)\cdot\frac{1}{(N\sin 1'')^{3}_{\varphi_a}}, \end{aligned}\right\}\ (79.)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_a - \operatorname{tang}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}2}\,\frac{1}{(2\,RN\sin 1'')_{\varphi_a}} + [8{,}29197 - 20]\operatorname{tang}\varphi_a\sec^{2}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}4} \\ &\quad\cdot(3 + [0{,}28770]\cos^{2}\varphi_a + [8{,}82732 - 10]\cos^{4}\varphi_a - [6{,}25670 - 10]\cos^{6}\varphi_a) \\ &\quad\cdot\frac{1}{(2\,RN\sin 1'')_{\varphi_a}}\cdot\frac{1}{(N\sin 1'')^{2}_{\varphi_a}}, \\ l'' &= \sec\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}}\,\frac{1}{(N\sin 1'')_{\varphi_a}} - [8{,}59300 - 20]\sec^{3}\varphi_a\cdot y^{\mathrm{m}3}\,(2 - \cos^{2}\varphi_a \\ &\quad + [7{,}82732 - 10]\cos^{4}\varphi_a)\,\frac{1}{(N\sin 1'')^{3}_{\varphi_a}}. \end{aligned}\right\}\ (79\mathrm{a}.)$$

4.) **Um aus den Coordinaten x^{m}, y^{m} und x_1^{m}, y_1^{m} zweier Punkte p, p_1 der Gaussischen Projection die geodätische Linie s^{m} zwischen den entsprechenden Punkten P, P_1 auf dem Erdsphäroide zu erhalten**, hat man folgendermassen zu verfahren.

Die gerade Linie σ^m zwischen den beiden Punkten p, p_1 der Projection ist

$$\sigma^m = \sqrt{(x_1{}^m - x^m)^2 + (y_1{}^m - y^m)^2}.$$

Dieselbe wird aber bequemer für die Berechnung vermittelst eines Hülfswinkels ϱ' gefunden, welcher zugleich die Richtung der Linie $pp_1 = \sigma^m$ im Punkte p der Projectionsebene gegen die positive Richtung der Abscissenaxe angiebt, wofür Gauss den Ausdruck „Azimut in plano" gebraucht. Nämlich

$$\operatorname{tang} \varrho' = \frac{y_1{}^m - y^m}{x_1{}^m - x^m}, \qquad \text{analog (75a.)}$$

$$\sigma^m = (x_1{}^m - x^m) \sec \varrho' = (y_1{}^m - y^m) \operatorname{cosec} \varrho'. \qquad \text{analog (76a.)}$$

Mit Hinzuziehung von σ^m hat man alsdann die folgende Gleichung

$$\left.\begin{aligned} \log s^m &= \log \sigma^m - \frac{10^7 M}{6\, RN} (y_1{}^{m2} + y_1{}^m y^m + y^{m2}) \\ &= \log \sigma^m - \frac{10^7 M}{24\, RN} (3 (y_1{}^m + y^m)^2 + (y_1{}^m - y^m)^2), \end{aligned}\right\} \text{(80.)}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \log s^m &= \log \sigma^m - [0{,}2441780] (3 (y_1{}^m + y^m)^2 + (y_1{}^m - y^m)^2) \frac{1}{(2\, RN \sin 1'')_{x_1 x}} \\ &= \log \sigma^m - [5{,}5586031] (3 (y_1{}^m + y^m)^2 + (y_1{}^m - y^m)^2) \frac{1}{(2\, RN)_{x_1 x}}. \end{aligned}\right\} \text{(80a.)}$$

Setzt man endlich $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{y_1{}^m - y^m}{y_1{}^m + y^m} = \operatorname{tang} \psi$, so erhält man die für logarithmische Berechnung bequemeren Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \log s^m &= \log \sigma^m - \frac{10^7 M}{24\, RN} \sec^2 \psi \cdot 3 (y_1{}^m + y^m)^2, \\ &= \log \sigma^m - [0{,}7212993] \sec^2 \psi \frac{1}{(2\, RN \sin 1'')_{x_1 x}} (y_1{}^m + y^m)^2, \\ &= \log \sigma^m - [6{,}0357244] \sec^2 \psi \frac{1}{(2\, RN)_{x_1 x}} (y_1{}^m + y^m)^2. \end{aligned}\right\} \text{(80b.)}$$

In den vorstehenden Gleichungen für $\log s^m$ bedeutet M den Modulus der Briggischen Logarithmen. Durch den Factor 10^7 wird das zweite Glied rechts unmittelbar in Einheiten der 7ten Decimale des Logarithmus ausgedrückt.

Lässt man den Punkt (x_1, y_1) dem Punkte (x, y) immer näher rücken, so erhält man mit Anwendung der logarithmischen Reihe den Grenzwert

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 + y^2 \frac{1}{(2\, RN)_x} \qquad \text{(81.)}$$

als Ausdruck des Vergrösserungsverhältnisses für das Linienelement im Punkte (x, y) der Projection gegen das entsprechende auf dem Erdsphäroide.

5.) Die Meridianconvergenz γ ist nach Gauss der Winkel, welchen in einem Punkte p der Projectionsebene die Projection des Meridians von P mit einer aus dem Punkte p der positiven Richtung der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden bildet. Dieser Winkel ist, wegen der Ähnlichkeit des Bildes mit dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen, mit dem entprechenden Winkel im Punkte P des Erdsphäroides identisch.

Um aus den gegebenen Coordinaten x^m, y^m eines Punktes p der Projection die Meridianconvergenz, ausgedrückt in Secunden, in diesem

Punkte, mithin auch im Punkte P, zu finden, dient nach vorhergegangener Multiplication des zweiten Gliedes rechts mit $\frac{\sin^2 1''}{\sin^2 1''}$ die Formel

$$\left.\begin{aligned}\gamma'' &= \operatorname{tang}\varphi_a \cdot y^m \frac{1}{(N\sin 1'')_{\varphi a}} - \tfrac{1}{3}\sin^2 1'' \operatorname{tang}\varphi_a \sec^2\varphi_a \cdot y^{m3} \\ &\cdot \left(1 - \frac{e^2}{1-e^2}\cos^4\varphi_a - 2\left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^2 \cos^6\varphi_a\right)\frac{1}{(N\sin 1'')^3_{\varphi a}},\end{aligned}\right\} \quad (82.)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\gamma'' &= \operatorname{tang}\varphi_a \cdot y^m \frac{1}{(N\sin 1'')_{\varphi a}} - [8{,}89403-20]\operatorname{tang}\varphi_a \sec^2\varphi_a \cdot y^{m3} \\ &\cdot (1 - [7{,}82732-10]\cos^4\varphi_a - [5{,}95567-10]\cos^6\varphi_a)\frac{1}{(N\sin 1'')^3_{\varphi a}}.\end{aligned}\right\} \quad (82a.)$$

6.) Die Richtung einer Linie gegen eine ihrer Lage und Richtung nach gegebenen Linie wird hier allgemein Azimut genannt. Gauss unterscheidet drei Arten von Azimuten.

a.) Das Azimut in plano $= \varrho'$ ist bereits unter 4.) definiert.

b.) Das Azimut auf dem Sphäroide $= \varrho$ ist die Richtung der geodätischen Linie PP_1 auf dem Sphäroide im Punkte P gegen eine aus P gezogene Linie, deren Projection eine mit der positiven Richtung der Abscissenaxe parallele Lage hat.

Da die Projection einer geodätischen Linie auf der Projectionsebene ihre konkave Seite stets der Abscissenaxe zukehrt, so wird der Winkelunterschied $\varrho - \varrho'$ im 1ten und 3ten Quadranten positiv, im 2ten und 4ten Quadranten negativ sein.

c.) Das gewöhnliche oder astronomische Azimut $= \alpha$ der geodätischen Linie PP_1 im Punkte P auf dem Sphäroide ist definiert durch die Gleichung

$$\alpha = \varrho - \gamma. \quad (83.)$$

Um aus den gegebenen Coordinaten x^m, y^m und $x_1{}^m$, $y_1{}^m$ zweier Punkte p und p_1 der Projection die beiden Azimute in plano ϱ' und ϱ_1' für die Gerade pp_1 in den Punkten p und p_1, und die beiden Azimute auf dem Sphäroide ϱ und ϱ_1 für die geodätische Linie PP_1 in den Punkten P und P_1 zu finden, dienen folgende Gleichungen:

$$\operatorname{tang}\varrho' = \frac{y_1{}^m - y^m}{x_1{}^m - x^m},$$

$$\varrho_1' = 180° + \varrho'.$$

$$\left.\begin{aligned}\varrho &= \varrho' + \tfrac{1}{3}(x_1{}^m - x^m)(2y^m + y_1{}^m)\frac{1}{(2RN\sin 1'')_{xxx_1}}, \\ \varrho_1 &= \varrho_1' - \tfrac{1}{3}(x_1{}^m - x^m)(2y_1{}^m + y^m)\frac{1}{(2RN\sin 1'')_{xx_1x_1}}.\end{aligned}\right\} \quad (84.)$$

7.) Sind in jedem Eckpunkte eines geodätischen Dreiecks PP_1P_2 die Azimute auf dem Sphäroide nach den beiden anderen Punkten berechnet, so sind

$$\angle P = \varrho_{\cdot 1} - \varrho_{\cdot 2}, \quad \angle P_1 = \varrho_{1\cdot 2} - \varrho_{1\cdot}, \quad \angle P_2 = \varrho_{2\cdot} - \varrho_{2\cdot 1}$$

die sphäroidischen Winkel des Dreiecks. Der Überschuss ihrer Summe über 180° ist der sphäroidische Excess. Derselbe kann aber auch direkt aus den Coordinaten der drei Eckpunkte bestimmt werden, und zwar ist derselbe für jedes messbare Dreieck durch die Gleichung

$$\varepsilon'' = ((x_1{}^m - x^m)(y_2{}^m - y^m) - (x_2{}^m - x^m)(y_1{}^m - y^m))\frac{1}{(2RN\sin 1'')_{xx_1x_2}} \quad (85.)$$

gegeben. Setzt man $\sqrt{\frac{(x_2^{\mathrm{m}} - x^{\mathrm{m}})(y_1^{\mathrm{m}} - y^{\mathrm{m}})}{(x_1^{\mathrm{m}} - x^{\mathrm{m}})(y_2^{\mathrm{m}} - y^{\mathrm{m}})}} = \cos\psi$ oder $= \sec\chi$, je nachdem der Zähler des als positiv vorausgesetzten Bruches kleiner oder grösser als der Nenner, so ist im ersten Falle

$$\varepsilon'' = \sin^2\psi \, \frac{1}{(2\,RN \sin 1'')_{xx_1x_2}} (x_1^{\mathrm{m}} - x^{\mathrm{m}})(y_2^{\mathrm{m}} - y^{\mathrm{m}}).$$

Sollte der Wert von ε'' mit einem Minuszeichen behaftet erscheinen, so ist solches einfach wegzulassen.

Für grosse, durch Berechnung aus messbaren Dreiecken abgeleitete Dreiecke, in welchen das Vergrösserungsverhältnis einen merkbaren Einfluss hat, ist dem ε'' noch eine Correction anzufügen, welches am zweckmässigsten auf folgende Weise geschieht:

$$\log \varepsilon_1'' = \log \varepsilon'' - 10^7\, M \cdot \tfrac{1}{6}\,(y^{\mathrm{m}} + y_1^{\mathrm{m}} + y_2^{\mathrm{m}})^2 \cdot \frac{1}{(RN)_{xx_1x_2}} \qquad \textbf{(86.)}$$

oder

$$\log \varepsilon_1'' = \log \varepsilon'' - [0{,}67015] \cdot (y^{\mathrm{m}} + y_1^{\mathrm{m}} + y_2^{\mathrm{m}})^2 \cdot \frac{1}{(2\,RN \sin 1'')_{xx_1x_2}}. \qquad \textbf{(86a.)}$$

Das zweite Glied rechts ist bereits in Einheiten der 7. Decimale des Logarithmus ausgedrückt.

Die von Gauss gegebenen rechtwinklig-ebenen Coordinaten, als Ergebnis der hannoverschen Landesvermessung, haben zur Längeneinheit ein Meter *WM*, welches nach den Walbeckschen Elementen des Erdsphäroides der zehnmillionste Teil des Meridianquadranten ist, und 443,307885 pariser Linien beträgt, während das legale französische, auch im deutschen Reiche als gesetzliche Längeneinheit eingeführte Meter *lM* = 443,296 pariser Linien hält. Ferner sind die Coordinaten aus der vorläufigen Länge *v* der Braacker Grundlinie abgeleitet, welche 3014,5799 Toisen betrug, während nach den von Peters und Andrae 1865 publicierten Berechnungen die definitive Länge *d* dieser Grundlinie 3014,45115 Toisen ist. Um daher die Gaussischen Coordinaten in legalen Metern und abgeleitet aus der definitiven Länge der Braacker Grundlinie zu erhalten, sind am bequemsten den Logarithmen der Coordinaten zwei Correctionen beizufügen, nämlich

$$(\log d - \log v) + (\log lM - \log WM) = -0{,}0000185 + 0{,}0000116 = -0{,}0000069,$$

d. h. die Logarithmen der Coordinaten sind in 7. Decimale um

$$-69$$

zu verbessern. Diese Verbesserung ist stets vor der weiteren Verwendung der Coordinaten auszuführen.

Da nach den Vorschriften des Central-Direktoriums für die Vermessungen im preussischen Staate die Coordinaten vom Nullpunkte aus in nördlicher und östlicher Richtung als positive, in südlicher und westlicher Richtung als negative Grössen genommen werden sollen, so ist in dem Coordinaten-Verzeichnis die Anordnung getroffen, dass links von der Benennung der Punkte die ursprünglichen Gaussischen Coordinaten aufgeführt sind, während rechts die wegen Meter- und Grundlinienänderung verbesserten Coordinaten mit entgegengesetztem Vorzeichen stehen.

Die Formeln unter 1.) bis 7.) beziehen sich, was hier noch einmal ausdrücklich erwähnt werden soll, auf die ursprüngliche Anordnung von Gauss, nämlich $+x$ südlich, $+y$ westlich, Anfangsrichtung der Azimute aber Südrichtung der Abscissenaxe. In den Formeln sind daher die x, y mit den Gaussischen Vorzeichen, die Azimute mit Südrichtung $= 0$ einzuführen, während die errechneten x, y mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen sind, und zu den errechneten Azimuten noch 180° zu addieren ist.

Im Jahre 1871 hat eine Neumessung der Braacker Grundlinie durch die Königliche Landesaufnahme stattgefunden, welche die Länge derselben gleich 3014,43536 Toisen angiebt. Darnach würden die Logarithmen der Gaussischen Coordinaten nicht um — 69 in 7ter Decimale, sondern um — 92 zu verbessern sein. Von dieser abermaligen Änderung dürfte jedoch aus den schon Seite 59 angegebenen Gründen Abstand genommen werden, und das um so mehr, als überhaupt wegen verloren gegangener Punkte und vielfacher ungenügender Identificierung der vorgefundenen mit den ursprünglichen Punkten, eine Einführung neuer Coordinaten nur noch von der Beendigung der Neumessungen und Berechnungen für die Provinz Hannover durch die Königliche Landesaufnahme abhängt.

§. 35. Die Projectionsmethode der mecklenburgischen Landesvermessung.

Die der Berechnung der rechtwinkligen, ebenen Coordinaten der mecklenburgischen Landesvermessung als Grundlage dienende Projectionsmethode besteht in der conformen Abbildung des Erdsphäroids auf einen geraden Kegel, dessen Axe mit der des Sphäroids zusammenfällt, und in nachheriger Abwickelung des Kegelmantels auf die Ebene. In dieser Projection erscheinen die Parallelkreise als concentrische Kreise, in deren Mittelpunkte die als Geraden sich darstellenden Meridiane sich schneiden. Wird der Kegel so gelegt, dass er das Sphäroid in dem Parallelkreise der Breite φ_0 berührt, welcher Normalparallelkreis genannt werden soll, so ist der Winkel zwischen der Seite und der Axe des Kegels gleichfalls φ_0. Die Entfernung des Normalparallelkreises von der Spitze des Kegels sei R_0, die Entfernung der Abbildung eines andern Parallelkreises des Sphäroids, dessen Breite $\varphi = \varphi_0 - f$ ist, dagegen $R = R_0 + r$. Die geographische Länge eines Punktes P auf diesem Parallelkreise gegen einen Anfangs- oder Hauptmeridian — nach Westen positiv gezählt — betrage λ, während die Länge des entsprechenden Punktes p auf dem Kegelmantel L sein möge. x und y seien die rechtwinkligen, ebenen Coordinaten des Punktes p auf dem abgewickelten Mantel, bezogen auf die den Hauptmeridian darstellende Gerade als Abscissenaxe und den Durchschnitt derselben mit dem Normalparallelkreise als Anfangspunkt, wobei die Südrichtung der x-Axe und die Westrichtung der y-Axe positiv angenommen werden. Das Vergrösserungsverhältnis m hat auf demselben Parallelkreise einen constanten Wert, für den Normalparallelkreis sei dieser m_0.

Zur Übertragung der Punkte des Sphäroids auf den Kegelmantel dienen alsdann die folgenden Gleichungen:

$$L = \lambda; \tag{87.}$$

$$e \sin \varphi_0 = \sin \vartheta; \quad e \sin \varphi = \sin \vartheta'; \tag{88.}$$

$$R_0 = \frac{m_0 \, a \cos \varphi_0}{\sin \varphi_0 \cos \vartheta}; \tag{89.}$$

$$R = R_0 + r = R_0 \left[\frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} \left(\frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\vartheta'}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\vartheta}{2}\right)} \right)^{e} \right]^{\sin \varphi_0} . \tag{90.}$$

Wird nun der Kegelmantel auf die Ebene abgewickelt, so ist der Winkel γ, welchen die Abbildungen des Hauptmeridians und des Meridians von der Länge λ mit einander bilden, oder die Meridianconvergenz, bestimmt durch die Gleichung

$$\gamma = L \sin \varphi_0 = \lambda \sin \varphi_0 . \tag{91.}$$

Für die Coordinaten x und y des Punktes p erhält man sodann

$$\left.\begin{aligned} x &= (R_0 + r)\cos\gamma - R_0 = r - 2\,(R_0 + r)\sin^2\frac{\gamma}{2} = r - 2\,R\sin^2\frac{\gamma}{2}, \\ y &= (R_0 + r)\sin\gamma = R\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (92.)$$

Das Vergrösserungsverhältnis auf dem Parallelkreise von der Breite φ ist

$$m = \frac{R\sin\varphi_0\cos\vartheta'}{a\cos\varphi}. \quad (93.)$$

Für Mecklenburg ist der Normalparallelkreis in der Breite $\varphi_0 = 53^\circ\ 45'$ angenommen, so dass $\varphi_0 - \varphi = f$ nicht grösser als $\pm\ 44'$ werden kann. Hätte man nun festgesetzt, dass auf dem Normalparallelkreise $m_0 = 1$ sein sollte, in welchem Falle die Abbildung des Sphäroids auf den berührenden Kegel erfolgt wäre, so würden sich für m die grössten Werte an der nördlichen und südlichen Grenze des Landes ergeben haben, und zwar würde für $f = -44'$, $m = 1{,}0000\,822090$ sein. Bestimmt man aber, dass das Bild an den beiden genannten Grenzen um so viel vergrössert erscheinen soll, als auf dem Normalparallelkreise verkleinert, so dass also nirgends die Abbildung um mehr als $\pm\frac{0{,}0000\,822090}{2} = \pm\frac{1}{24328{,}2}$ von dem Original abweicht, so hat man $m_0 = \frac{1}{1{,}0000\,411045}$ zu setzen, d. h. die Abbildung erfolgt auf einen Kegel, dessen Seiten dem tangierenden Kegel parallel sind, und welcher innerhalb des Landes das Sphäroid in 2 Parallelkreisen schneidet. Auf diesen beiden, die $\varphi = \varphi_0 - 31'\ 16{,}''2369$ und $\varphi = \varphi_0 + 31'\ 8{,}''4375$ entsprechen, ist $m = 1$; hier stimmt also das Bild mit dem Abgebildeten überein. Unter Zugrundelegung des letzten Wertes für m_0 erhält man aus (89.) und (90.) und mit den Besselschen Elementen des Erdsphäroids berechnet:

$$\log R_0 = 6{,}3809907296.1;\quad R_0 = 2404311{,}^T4775. \quad (89a.)$$

$$R = R_0 + r = [6{,}7702362958.2]\left(\frac{\left[\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\vartheta'}{2}\right)\right]^e}{\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)}\right)^{\sin\varphi_0} \quad (90a.)$$

Hieraus ist für r abgeleitet

$$\left.\begin{aligned} r = &+ \underset{[4{,}7566085.569]}{57096{,}3777330f} \; - \underset{[0{,}6792663.5]}{4{,}778222f^2} \; + \underset{[0{,}4586195.3]}{2{,}874879f^3} \; - \underset{[8{,}2366632]}{0{,}017245f^4} \\ &+ \underset{[6{,}6702459]}{0{,}000468f^5} \; + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (90b.)$$

wo f in Graden und r in Toisen ausgedrückt ist.

Der Nullpunkt der meklenburgischen Coordinaten ist nun schliesslich nicht auf dem Normalparallelkreise angenommen, sondern als solcher wurde der Schlossturm von Schwerin gewählt, dessen Breite $53^\circ\ 37'\ 29{,}''6900$ ist, so dass von den nach (92.) gefundenen Werten von x noch $r_0 = 7141{,}^T8947$ zu subtrahieren war. Endlich sind in dem Coordinatenverzeichnis die Werte für x und y aus Toisen in Meter umgewandelt.

Da an keiner Stelle des Bereiches der mecklenburgischen Landesvermessung die durch die Einführung der rechtwinklig-ebenen Coordinaten verursachte Abweichung von der Wirklichkeit den Wert $\frac{1}{24328}$ erreicht, so können diese Coordinaten direkt innerhalb eines jeden Rayons benutzt werden, für welchen man auch sonst die Erdoberfläche als Teil einer Ebene ansehen kann. Zur Orientierung des Systems an jeder Stelle bestimmt man die Meridianconvergenz aus den im Coordinatenverzeichnis gegebenen

Werten der Coordinaten eines Punktes durch die Gleichung

$$\tang \gamma = \frac{y}{x + R_0 + r_0}. \qquad \text{nach (92.)}$$

Will man indes auf das Vergrösserungsverhältnis innerhalb des Bereiches einer Detailvermessung Rücksicht nehmen, so hat man für die mittlere Breite des Gebietes nach (93.) unter Benutzung von (89a.) und (90b.) den Wert von m abzuleiten und alle aus den Coordinaten abgeleiteten Werte von Strecken durch m zu dividieren, um die wahren Längen zu erhalten.

Für Vermessungen innerhalb eines Rayons, in dem auf die sphärische bezw. sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht genommen werden muss, ist auf die gleichfalls im mecklenburgischen Coordinatenverzeichnis gegebenen geographischen Coordinaten der Dreieckspunkte zurückzugehen, deren Übertragung in andere Form in früheren Paragraphen gelehrt wurde.

Will man bei den verschiedenen Berechnungen mit rechtwinklig-sphärischen und rechtwinklig-ebenen Coordinaten für die Winkel und Richtungen die neue Kreisteilung in Anwendung bringen, so hat man in den Formeln 50°, 100°, 200°, 300°, 400° statt 45°, 90°, 180°, 270°, 360° zu setzen. Die Logarithmen der aus linearen Ausdrücken abgeleiteten, trigonometrischen Functionen gelten auch unmittelbar für neue Teilung. Es ist $\log \sin 1''$ n. T. $= 4{,}1961198.8$; man muss daher zu den Tafelwerten von $\log \frac{1}{2RN \sin 1''}$ noch 0,4894549.9 addieren. Für sphäroidische Berechnungen ist nur die alte Kreisteilung im Gebrauche.

Anhang.

Auflösung einiger geodätischer Aufgaben.

I. Bestimmung eines geodätischen Punktes durch Rückwärtseinschneiden.

(Problem der drei Punkte.)

Diese von dem Schöpfer der Triangulierung W. Snellius — geb. 1591, gest. 1626 —, Professor der Mathematik in Leiden, zuerst behandelte Aufgabe wurde im Jahre 1692 von L. Pothenot — gest. 1732 —, Professor der Mathematik in Paris, in einer besonderen Abhandlung der Akademie in Paris vorgelegt und ist seitdem unter dem Namen

„Die Pothenotsche Aufgabe“

bekannt. Dieselbe ist in allen Lehrbüchern der praktischen Geometrie, sowie in Messungs- und Berechnungsvorschriften so ausführlich abgehandelt, dass eine abermalige Besprechung überflüssig erscheinen könnte, wenn es sich nur um die Formelentwickelung der ursprünglichen Aufgabe handelte. Im nachfolgenden soll daher diese Entwickelung nur so weit, wie nötig, gegeben, dagegen die Behandlung der Aufgabe vorzugsweise auf den Fall ausgedehnt werden, wo vom festzulegenden Punkte aus nach mehr als drei bestimmten Punkten die Richtungen gemessen sind, und deshalb eine Ausgleichung stattfinden muss, welche zu den wahrscheinlichsten Werten der gesuchten Stücke führt.

Gauss gab in den astronomischen Nachrichten, Band I, Nr. 6, Jahrgang 1823, im Hinblick auf seine Projectionsmethode eine Ausgleichung der Coordinaten des Beobachtungspunktes, wenn diese bereits vorläufig auf anderem Wege aus zwei Dreiecken abgeleitet waren. Diesem Ausgleichungsverfahren folgte im allgemeinen Gerling in seiner Publication: „Die Pothenotsche Aufgabe in praktischer Beziehung. Marburg, 1840.“ Seitdem erscheint die Behandlung dieser Ausgleichungs-Aufgabe in allen Lehrbüchern der praktischen Geometrie und in den Rechnungsvorschriften eingehüllt in dasselbe Gewand der rechtwinkligen Coordinaten, als ob gar keine andere Lösung möglich wäre, während es doch am natürlichsten und zugleich am kürzesten ist, die ursprünglichen Winkel- oder Richtungsbeobachtungen selbst, und nicht die rechtwinkligen Coordinaten, also Functionen der Beobachtungsgrössen, auszugleichen. Da vor der Verwendung der etwa in rechtwinkligen Coordinaten gegebenen Anschnittspunkte deren gegenseitige Lage vorher nach Seiten und Winkeln oder Richtungen umgerechnet werden muss, so verschwindet auch als Grund der Coordinaten- statt Winkelausgleichung die schon gegebene Form der Lagenbestimmung der definitiven Stücke. In vielen Fällen sind aber nicht Coordinaten, sondern Seiten und Winkel zwischen den Anschnittspunkten von vornherein gegeben, so dass rechtwinklige Coordinaten gar nicht in die Behandlungsweise passen, z. B. wenn die Aufgabe von der Landesaufnahme bei ihren trigonometrischen Arbeiten gelöst werden muss.

Sind drei geodätische Punkte durch Polarcoordinaten von einem dieser Punkte aus gegeben, und hat man auf einem vierten Punkte, welcher jedoch nicht in der Peripherie des durch die gegebenen Punkte bestimmten Kreises, oder in einer Geraden

mit denselben liegen darf, die Winkel zwischen oder die Richtungen nach den drei gegebenen Punkten gemessen, so hat man fünf von einander unabhängige Stücke, wovon zwei Seiten sind; damit ist die Möglichkeit einer einzigen Lösung constatiert. Unendlich viele Lösungen würden stattfinden, wenn die vier Punkte in der Peripherie eines Kreises lägen; daher ist dieser Fall unbrauchbar. Liegen die vier Punkte in einer Geraden, so sind nur Winkel $= 0°$ oder $= 180°$ vorhanden, die Lösung der Aufgabe daher unmöglich. Liegen die drei gegebenen Punkte nicht in einer Geraden, dagegen aber der vierte mit zweien derselben, so ist zwar an dem vierten Punkte nur ein unabhängiger Winkel vorhanden, dagegen erhält man ein Dreieck mit zwei Winkeln und einer Seite, und es kann darnach die Lösung auf bekannte Weise stattfinden. Alle übrigen Fälle lassen sich leicht in einen zusammenfassen, wenn man die Bezeichnung der Dreiecke und Winkel nur stets in einem Sinne — von links nach rechts — nimmt und dabei vermeidet, negative Winkel einzuführen. Sind die drei Punkte in geographischen oder rechtwinkligen Coordinaten gegeben, so hat man daraus zuerst die Polarcoordinaten abzuleiten. Zur Vereinfachung sei zunächst vorausgesetzt, dass die gegebenen Punkte in ihrer gegenseitigen Lage und ebenso die gemessenen Winkel oder Richtungen unter sich gleiche Genauigkeit haben, und das Viereck als in der Ebene liegend angesehen werden darf.

Fig. 17. Sind $P_1P_2 = a$, $P_2P_3 = b$, $\angle\, P_3P_2P_1 = \gamma$ als definitiv gegeben, $\angle\, P_1PP_2 = \alpha$, $\angle\, P_2PP_3 = \beta$ beobachtet, und besteht die Bedingung: $\alpha + \beta + \gamma$ ungleich $180°$, so ist, wenn man $\angle\, P_2P_1P = \zeta$, $\angle\, PP_3P_2 = \zeta_1$ setzt, $\zeta_1 + \zeta = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$ oder $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, also bekannt, und ferner nach dem Sinussatze

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{PP_2}{\sin\zeta},$$

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\zeta_1}{PP_2}.$$

Durch Multiplication beider Gleichungen erhält man

$$\frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} = \frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta} = \frac{\sin(\zeta_1 + \zeta - \zeta)}{\sin\zeta} = \frac{\sin(\zeta_1 + \zeta)\cos\zeta - \cos(\zeta_1 + \zeta)\sin\zeta}{\sin\zeta}$$

$$= \sin(\zeta_1 + \zeta)\operatorname{cotg}\zeta - \cos(\zeta_1 + \zeta).$$

Da nun $(\zeta_1 + \zeta)$ bekannt ist, so hat man für ζ folgende Gleichung

$$\operatorname{cotg}\zeta = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha\sin(\zeta_1 + \zeta)} + \operatorname{cotg}(\zeta_1 + \zeta).$$

Die Berechnung von $\operatorname{cotg}\zeta$ geschieht am besten mit Hülfe der Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen von Zahlen, deren Logarithmen gegeben sind; dieselben finden sich unter anderen 5-stellig in den Logarithmentafeln von Bremiker, Wittstein, Gauss, Albrecht, 6-stellig bei Bremiker und 7-stellig in den Tafeln der Gaussischen Logarithmen von Wittstein.

Die Winkel in den beiden Dreiecken sind alsdann folgende:

Dreieck PP_1P_2: $\angle\, P = \alpha$; $\angle\, P_1 = \zeta$; $\angle\, P_2 = 180° - (\alpha + \zeta)$;
Dreieck PP_2P_3: $\angle\, P = \beta$; $\angle\, P_2 = \alpha + \gamma + \zeta - 180°$; $\angle\, P_3 = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \zeta)$.

Bei der nun folgenden Seitenberechnung muss sich für $\log PP_2$ aus beiden Dreiecken derselbe Wert ergeben, was als Controle der Rechnung dient. Zur Orientierung des Vierecks ist die Richtung einer gegebenen Seite erforderlich.

Eleganter wird die Entwickelung durch Einführung eines Hülfswinkels φ und der halben Summe und halben Differenz von ζ_1 und ζ.

Man setzt nämlich

$$\frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta} = \frac{a\sin\beta}{b\sin\alpha} = \text{tang}\,\varphi,$$

$$\frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta} \mp 1 = \text{tang}\,\varphi \mp \text{tang}\,45^\circ.$$

Dividiert man nun die Gleichung zwischen den Differenzen durch die Gleichung zwischen den Summen, so ist

$$\frac{\sin\zeta_1 - \sin\zeta}{\sin\zeta_1 + \sin\zeta} = \frac{\sin\varphi\cos 45^\circ - \cos\varphi\sin 45^\circ}{\sin\varphi\cos 45^\circ + \cos\varphi\sin 45^\circ} = \frac{\sin(\varphi - 45^\circ)}{\sin(\varphi + 45^\circ)}.$$

Hieraus folgt aber nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta)\,\text{tang}\,(\varphi - 45^\circ) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta)\,\text{cotg}\,(\varphi + 45^\circ).$$

Aus $\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta)$ und $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta)$ findet man ζ_1 und ζ. Die weitere Berechnung ist dann wie oben.

Sind von P aus mehr als drei Punkte angeschnitten, kann also eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate stattfinden, so wird man die Punkte P_1, $P_2, \ldots$ unter sich so verbinden, dass die mit P zu bildenden Dreiecke eine zweckentsprechende Form erhalten, d. h. dass die Dreieckswinkel an P nicht zu spitz oder zu stumpf ausfallen, und in demselben Dreiecke nicht Seiten von sehr verschiedener Länge vorkommen. Hierauf wird auch bei dem später folgenden Zahlenbeispiele bedacht genommen werden.

Nachdem aus zwei Dreiecken, I und II, nach den bereits gegebenen Formeln als vorläufiger Wert der Winkel ζ an einem der gegebenen Punkte berechnet ist — ζ_1 ist nur die Ergänzung von $(\alpha + \beta + \gamma + \zeta)$ zu 360° —, wird man für die übrigen Dreiecke aus je einem Winkel bei P, durch Übertragung des zweiten aus dem vorhergehenden Dreiecke und Schliessung des dritten Winkels auf 180° die Winkel aller Dreiecke erhalten und die Seitenberechnung ausführen können. Die den Dreiecken I und II gemeinschaftliche Seite muss alsdann in ihren beiden Logarithmen übereinstimmen*) und dient zugleich als Rechenprobe für die richtige Bestimmung von ζ, während die übrigen, zwei Dreiecken gemeinschaftlichen Seiten in ihren Logarithmen Differenzen geben werden. Es ist nun Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, die Differenzen durch Verbesserung der gemessenen Winkel oder Richtungen so zu beseitigen, dass man für die Festlegungsstücke des Punktes P die wahrscheinlichsten Werte erhält.

Fig. 15. Um den Gang des Ausgleichungsverfahrens am übersichtlichsten darzustellen, sind nachfolgend alle Punkte von P_1 bis P_m in ein Polarcoordinatensystem gebracht, welches den Punkt P_1 zum Pole hat; hiernach ist allen Dreiecken die Seite PP_1 gemein. Die Winkel in P werden aus den einzelnen, vorerst als gleichgewichtig angenommenen Richtungen 1., 2., 3., $\cdots$ *m*. — entsprechend den Punkten P_1, P_2, $P_3, \cdots P_m$ — abgeleitet. Die in Secunden ausgedrückten und gesuchten Verbesserungen der Richtungen werden mit (1), (2), (3), $\cdots$ (*m*), die Verbesserung der Richtung P_2P des errechneten Winkels $PP_2P_1 = \zeta$ aber mit (ζ) bezeichnet. Die Richtungen von P_1 nach P_2, $P_3, \cdots$ sind definitiv, dürfen daher keine Verbesserung erhalten. Dieses vorausgeschickt, gruppieren sich die Verbesserungen der Winkel in den einzelnen (m —1) Dreiecken wie folgt, wobei nur noch bemerkt werden soll, dass man aus der Verbindung der Verbesserungen sofort auch die Bildung der Winkel selbst erkennen kann.

*) Die scharfe Berechnung des $\angle\,\zeta$, also auch die Übereinstimmung der beiden Logarithmen für die gemeinschaftliche Seite ist nicht absolut nötig, sondern nur für die Elimination der Richtungsverbesserung (ζ), welche vor der Bildung der Bedingungsgleichungen geschehen muss, bequemer. Ist auf anderem Wege $\angle\,\zeta$ annähernd bekannt, so kann überhaupt seine nochmalige Berechnung nach den Formeln unterbleiben.

I. Dreieck $P_1 P_2 P$.	II. Dreieck $P_1 P_3 P$.	III. Dreieck $P_1 P_4 P$.
$(\angle P_1 + (1) - (2) - (\zeta))$	$\angle P_1 + (1) - (2) \quad - (\zeta)$	$\angle P_1 + (1) - (2) \quad - (\zeta)$
$\angle P_2 \quad + (\zeta)$	$(\angle P_3 \quad + (2) - (3) + (\zeta))$	$(\angle P_4 \quad + (2) - (4) + (\zeta))$
$\angle P - (1) + (2)$	$\angle P - (1) \quad + (3)$	$\angle P - (1) \quad + (4)$

IV. Dreieck $P_1 P_5 P$.		$[M-1]$. Dreieck $P_1 P_m P$.
$\angle P_1 + (1) - (2) \quad - (\zeta)$		$\angle P_1 + (1) - (2) \quad - (\zeta)$
$(\angle P_5 \quad + (2) - (5) + (\zeta))$	. . . .	$(\angle P_m \quad + (2) - (m) + (\zeta))$
$\angle P - (1) \quad + (5)$		$\angle P - (1) \quad + (m)$

Die dritten, auf 180° geschlossenen Winkel sind eingeklammert.

Berechnet man nun aus den $(m-1)$ Dreiecken den $\log P_1 P$, wobei man die logarithmischen Differenzen für 1″ zwischen den Tafellogarithmen der sin mit δ, der Dreiecksnummer und dem Indexe des betreffenden Winkels bezeichnet — z. B. für $\log \sin P_4$ aus dem Dreieck III hat man die logarithmische Differenz $\delta \mathrm{III}_4$ —, so erhält man folgende Ausdrücke für $\log P_1 P = L +$ Verbesserung.

$$\left\{\begin{array}{llllllll}
\text{I.} & \log P_1 P = L_1 & + & \delta\mathrm{I}(1) - & \delta\mathrm{I}(2) & - & - & \\
\text{II.} & \quad " \quad = L_1 & + & \delta\mathrm{II}(1) + & \delta\mathrm{II}_3(2) - (\delta\mathrm{II} + \delta\mathrm{II}_3)(3) & & - & \\
\text{III.} & \quad " \quad = L_3 & + & \delta\mathrm{III}(1) + & \delta\mathrm{III}_4(2) & - & -(\delta\mathrm{III} + \delta\mathrm{III}_4)(4) & \\
\text{IV.} & \quad " \quad = L_4 & + & \delta\mathrm{IV}(1) + & \delta\mathrm{IV}_5(2) & - & - & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
[M-1]. & \quad " \quad = L_{m-1} & + & \delta[M-1](1) + & \delta[M-1]_m(2) & - & - &
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
- & \ldots & - & + & \delta\mathrm{I}_2(\zeta) \\
- & \ldots & - & + & \delta\mathrm{II}_3(\zeta) \\
- & \ldots & - & + & \delta\mathrm{III}_4(\zeta) \\
-(\delta\mathrm{IV} + \delta\mathrm{IV}_5)(5) & \ldots & - & + & \delta\mathrm{IV}_5(\zeta) \\
\cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \ldots & \cdot & & \cdot \\
- & \ldots & -(\delta[M-1] + \delta[M-1]_m)(m) & + & \delta[M-1]_m(\zeta).
\end{array}\right\}$$

Zieht man jetzt von $\log P_1 P$ aus dem I. Dreiecke die $\log P_1 P$ aus den übrigen $(m-2)$ Dreiecken ab, so erhält man, wenn $L_1 - L_1 = 0$, $L_1 - L_3 = n_1$, $L_1 - L_4 = n_2, \ldots$ $L_1 - L_{m-1} = n_{m-3}$ gesetzt wird,

$$\left\{\begin{array}{llllll}
0=0 & +(\delta\mathrm{I}-\delta\mathrm{II})(1) & -(\delta\mathrm{I}+\delta\mathrm{II}_3)(2) & +(\delta\mathrm{II}+\delta\mathrm{II}_3)(3) & - & \\
0=n_1 & +(\delta\mathrm{I}-\delta\mathrm{III})(1) & -(\delta\mathrm{I}+\delta\mathrm{III}_4)(2) & - & +(\delta\mathrm{III}+\delta\mathrm{III}_4)(4) & \\
0=n_2 & +(\delta\mathrm{I}-\delta\mathrm{IV})(1) & -(\delta\mathrm{I}+\delta\mathrm{IV}_5)(2) & - & - & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0=n_{m-3} & +(\delta\mathrm{I}-\delta[M-1])(1) & -(\delta\mathrm{I}+\delta[M-1]_m)(2) & - & - &
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{lllll}
- & \ldots & - & +(\delta\mathrm{I}_2-\delta\mathrm{II}_3)(\zeta) \\
- & \ldots & - & +(\delta\mathrm{I}_2-\delta\mathrm{III}_4)(\zeta) \\
+(\delta\mathrm{IV}+\delta\mathrm{IV}_5)(5) & \ldots & - & +(\delta\mathrm{I}_2-\delta\mathrm{IV}_5)(\zeta) \\
\vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
- & \ldots & +(\delta[M-1]+\delta[M-1]_m)(m) & +(\delta\mathrm{I}_2-\delta[M-1]_m)(\zeta)
\end{array}\right\}$$

Bestimmt man (ζ) aus der ersten Gleichung, und substituiert den gefundenen Wert in die folgenden Gleichungen, so hat man schliesslich die von (ζ) freien $(m-3)$

Bedingungsgleichungen

zwischen m Unbekannten von folgender allgemeinen Form

$$\left.\begin{array}{l}
n_1 = a_1(1) + a_2(2) + a_3(3) + a_4(4) + a_5(5) + \ldots + a_m(m) \\
n_2 = b_1(1) + b_2(2) + b_3(3) + b_4(4) + b_5(5) + \ldots + b_m(m) \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
n_{m-3} = r_1(1) + r_2(2) + r_3(3) + r_4(4) + r_5(5) + \ldots + r_m(m).
\end{array}\right\} \quad (94.)$$

Multipliciert man nun die Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit den unbestimmten Grössen k_1, k_2, $..k_{m-3}$, addiert alsdann diese Gleichungen und sucht die k in der Weise zu bestimmen, dass in der Summengleichung die (1), (2),..(m) ihren Coefficienten gleichgesetzt werden, d. h. dass die folgenden, von Gauss

Correlatengleichungen

genannten Bedingungen bestehen

$$\left.\begin{array}{l}
(1) = a_1k_1 + b_1k_2 + \ldots + r_1k_{m-3} \\
(2) = a_2k_1 + b_2k_2 + \ldots + r_2k_{m-3} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \ldots \quad \cdot \\
(m) = a_mk_1 + b_mk_2 + \ldots + r_mk_{m-3},
\end{array}\right\} \quad (95.)$$

so erhält die Summengleichung die nachstehende Form

$$[nk]^{*)} = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (m)^2.$$

Setzt man hierin $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots + (m)^2 = [vv]$, so ist

$$[nk] = [vv] = (m-3)\,\mu^2,$$

d. h. der mittlere Fehler μ einer Richtung ist

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{m-3}} = \sqrt{\frac{[nk]}{m-3}}. \quad (96.)$$

Führt man dagegen die Werte für (1), (2),...(m) aus den Correlatengleichungen in (94.) ein, so erhält man $(m-3)$ Gleichungen mit $(m-3)$ Unbekannten, welche unter dem Namen

Normalgleichungen

eingeführt sind und nachstehende Form haben:

---

*) In den Formeln der Ausgleichungsrechnung ist von Gauss die Klammer [] allgemein als Summenzeichen eingeführt, z. B. $[nk] = n_1k_1 + n_2k_2 + \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = [aa]k_1 + [ab]k_2 + \ldots\ldots + [am]k_{m-3} \\ n_2 = [ab]k_1 + [bb]k_2 + \ldots\ldots + [bm]k_{m-3} \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots\cdot \qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots\cdot \qquad \cdot \\ \quad\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdots\cdot \qquad \cdot \\ n_{m-3} = [am]k_1 + [bm]k_2 + \ldots\ldots + [mm]k_{m-3}. \end{array}\right\} \quad (97.)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die k bestimmen, und durch Substituierung derselben in (95.) endlich auch die (1), (2), (3), ... (m).

Verbessert man nun mit den Werten von (1), (2), ... die gemessenen Richtungen 1., 2., ... m., und nach Bestimmung des Zahlenwertes von (ζ) auch den Winkel ζ, berichtigt hiernach die in den Dreiecken zusammengestellten Winkel und führt die Seitenberechnung aus, was für die gemeinschaftlichen Seiten ohne nochmaliges Aufschlagen der log sin, durch blosse Hinzufügung der numerischen Werte der logarithmischen Verbesserungen zu den bereits vorhandenen Logarithmen geschehen kann, so hat man nach Beseitigung aller Widersprüche die wahrscheinlichsten Angaben zur Bestimmung der Lage des Punktes P.

Fig. 16. Das folgende Beispiel, welches „Helmert. Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Leipzig 1872" pag. 158 bis 163 in bezug auf die gegebenen Stücke entnommen ist und die definitiven Werte der rechtwinkligen, ebenen Coordinaten — Südrichtung und Westrichtung positiv gesetzt — von fünf geodätischen Punkten und die gemessenen Richtungen nach denselben auf einem sechsten Punkte P giebt, ist für die vorliegende Ausgleichung zur Bildung günstiger Dreiecke in der Weise umgeformt, dass den Helmertschen Punkten 2., 4., 1., 5. und 3. hier die Punkte P_1 bis P_5, und ebenso den aufeinanderfolgenden Richtungen auf P nach diesen Punkten hier die Richtungen 1., 5., 2., 4., 3. entsprechen, dass ferner aus den rechtwinkligen Coordinaten der gegebenen Punkte in der Reihenfolge P_1 bis P_5 zwischen diesen Punkten die Logarithmen der vier Seiten P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 und P_4P_5 und deren Richtungen — Nordrichtung = Anfangsrichtung — abgeleitet sind. Hiernach sind gegeben:

log s^m	ϱ = Richtung von s^m.	Gemessene Richtungen auf P.
$\log P_1P_2 = \log s_1{}^m = 3{,}7425352.1$	$\varrho_{1\cdot 2} = 159°\ 30'\ 51,''432$	$1. = 0°\ 0'\ 0'' + (1)$
„ $P_2P_3 =$ „ $s_2{}^m = 3{,}6701361.5$	$\varrho_{2\cdot 3} = 281°\ 42'\ 43,''723$	$5. = 6°\ 42'\ 36,''54 + (5)$
„ $P_3P_4 =$ „ $s_3{}^m = 3{,}2401207.3$	$\varrho_{3\cdot 4} = 86°\ 41'\ 46,''405$	$2. = 96°\ 39'\ 57,''09 + (2)$
„ $P_4P_5 =$ „ $s_4{}^m = 3{,}3725991.3$	$\varrho_{4\cdot 5} = 355°\ 10'\ 13,''135$	$4. = 128°\ 45'\ 30,''86 + (4)$
		$3. = 175°\ 58'\ 18,''50 + (3)$

Zum Zwecke der Vergleichung mit Helmerts Angaben sind ferner gegeben die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P_1, nämlich $x_1{}^m = + 4228,{}^m239$, $y_1{}^m = + 2646,{}^m895$.

Berechnung von ζ und ζ_1.

$\angle P_1PP_2 = (-1. + 2.) = 96°\ 39'\ 57,''09$	$\log s_1{}^m = 3{,}7425352.1$
$\angle P_2PP_3 = (-2. + 3.) = 79°\ 18'\ 21,''41$	$\text{cpl} \log s_2{}^m = 6{,}3298638.5$
$\angle P_3P_2P_1 = (\varrho_{2\cdot 1} - \varrho_{2\cdot 3}) = 57°\ 48'\ 7,''709$	$\log \sin (-2. + 3.) = 9{,}9923909.3$
$\Sigma = 233°\ 46'\ 26,''209$	$\text{cpl} \log \sin (-1. + 2.) = 0{,}0029458.0$
$\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 63°\ 6'\ 46,''8955$	$\log \tan \varphi = 0{,}0677357.9$
$\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = 8°\ 43'\ 34,''3996$	$\varphi = 49°\ 27'\ 0,''473$
$\zeta_1 = 71°\ 50'\ 21,''295$	$\log \tan (\varphi - 45°) = 8{,}8911247.3$
$\zeta = 54°\ 23'\ 12,''496$	$\log \tan \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 0{,}2949551.1$
	$\log \tan \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = 9{,}1860798.4$

Vorläufige Seitenberechnung.

Bezeichnet man allgemein in einem Dreiecke die Seiten mit a^m, b^m, s^m, die gegenüberliegenden Winkel mit α, β, γ, ihre Verbesserungen mit (α), (β), (γ), welche ent-

weder Winkel- oder Richtungsverbesserungen sein können, die logarithmischen Differenzen der logsin für 1″ mit δ vor der Winkelbezeichnung, wofür bei der logarithmischen Berechnung die Zahlenwerte eingesetzt werden, so hat man zur Herleitung der definitiven Zahlenwerte von a^m und b^m die beiden Ausdrücke

$$\log a^m + \delta\alpha\,(\alpha) - \delta\gamma\,(\gamma); \quad \log b^m + \delta\beta\,(\beta) - \delta\gamma\,(\gamma),$$

für die Berechnung der Dreiecke aber das folgende als Kopf aufgeführte Schema.

$\angle\,\alpha + (\alpha)$; $\angle\,\beta + (\beta)$; $\angle\,\gamma + (\gamma)$.	$\log s^m$; cpl $\log \sin \gamma - \delta\gamma\,(\gamma)$; $\log \sin \alpha + \delta\alpha\,(\alpha)$; $\log a^m + \delta\alpha\,(\alpha) - \delta\gamma\,(\gamma)$.	$\log s^m$; cpl $\log \sin \gamma - \delta\gamma\,(\gamma)$; $\log \sin \beta + \delta\beta\,(\beta)$; $\log b^m + \delta\beta\,(\beta) - \delta\gamma\,(\gamma)$.
I. Dreieck. $\alpha_1 = P_1 =$ 54° 28′ 12,″496 $+(\zeta)$ $\beta_1 = P_2 =$ (28 56 50,414 $+(1) - (2)$ $-(\zeta))$ $\gamma_1 = P =$ 96 39 57,090 $-(1) + (2)$	3,7425352.1 0,0029458.0 + 2.4((2)—(1)) 9,9100727.4 + 15.1 (ζ) $\log a_1^m$ = 3,6555537.5 = $\log PP_2$ —2.4 (1) +2.4 (2) +15.1 (ζ)	
II. Dreieck. $\alpha_2 = P_2 =$ 28° 51′ 17,″295 $-(1) + (2)$ $+(\zeta)$ $\beta_2 = P_3 =$ (71 50 21,295 $+(1)$ $-(3) - (\zeta))$ $\gamma_2 = P =$ 79 18 21,410 $-(2) + (3)$	3,6701361.5 0,0076090.7 — 3.9((3)—(2)) 9,6835798.1 + 38.2((2)—(1)+(ζ)) l. a_2^m = 3,3613250.3 = $\log PP_3$ —38.2 (1) +42.1 (2) —3.9 (3) +38.2 (ζ)	3,6701361.5 0,0076090.7 — 3.9((3)—(2)) 9,9778085.3 + 6.9((1)—(3)—(ζ)) l. b_2^m = 3,6555537.5 = $\log PP_2$ +6.9 (1) +3.9 (2) —10.8 (3) —6.9 (ζ)
III. Dreieck. $\alpha_3 = P_4 =$ (75° 57′ 48,″383 $-(1)$ $+(4) + (\zeta))$ $\beta_3 = P_3 =$ 56 49 23,977 $+(1) - (3)$ $-(\zeta)$ $\gamma_3 = P =$ 47 12 47,640 $+(3) - (4)$	3,2401207.3 0,1343709.4 —19.5((3)—(4)) 9,9868349.3 + 5.3((4)—(1)+(ζ)) l a_3^m = 3,3613266.0 = $\log PP_3$ —5.3 (1) —19.5 (3) +24.8 (4) +5.3 (ζ)	3,2401207.3 0,1343709.4 —19.5((3)—(4)) 9,9227189.0 +13.8((1)—(3)—(ζ)) l. b_3^m = 3,2972105.7 = $\log PP_4$ +13.8 (1) —33.3 (3) +19.5 (4) —13.8 (ζ)
IV. Dreieck. $\alpha_4 = P_5 =$ (45° 26′ 27,″333 $-(1)$ $+(5) + (\zeta))$ $\beta_4 = P_4 =$ 12 30 38,347 $+(1) - (4)$ $-(\zeta)$ $\gamma_4 = P =$ 122 2 54,320 $+(4) - (5)$	3,3725991.3 0,0718090.8 +13.2((4)—(5)) 9,8528015.7 +20.7((5)—(1)+(ζ)) l. a_4^m = 3,2972097.8 = $\log PP_4$ —20.7 (1) +13.2 (4) +7.5 (5) +20.7 (ζ)	

Bildung der Bedingungsgleichungen.

$$\text{I.,}\quad \log PP_2 = + \cdots 37.5 - 2.4\,(1) + 2.4\,(2) + 15.1\,(\zeta)$$
$$\text{II.,}\quad -\log PP_2 = - \cdots 37.5 - 6.9\,(1) - 3.9\,(2) + 10.8\,(3) + 6.9\,(\zeta)$$
$$0 = 0 - 9.3\,(1) - 1.5\,(2) + 10.8\,(3) + 22.0\,(\zeta)$$
$$0 = -[9{,}62606]\,(1) - [8{,}83367]\,(2) + [9{,}69100]\,(3) + (\zeta)$$
$$\text{a.,}\quad 0 = -13.91\,(1) - 2.24\,(2) + 16.15\,(3) + 32.9\,(\zeta)$$
$$\text{b.,}\quad 0 = -14.58\,(1) - 2.35\,(2) + 16.94\,(3) + 34.5\,(\zeta)$$

$$\text{III.,}\quad +\log PP_3 = + \cdots 66.0 - 5.3\,(1) - 19.5\,(3) + 24.8(4) + 5.3(\zeta)$$
$$\text{II.,}\quad -\log PP_3 = - \cdots 50.3 + 38.2\,(1) - 42.1\,(2) + 3.9\,(3) - 38.2(\zeta)$$
$$\text{a.,}\quad 0 = -13.91(1) - 2.24(2) + 16.15(3) + 32.9(\zeta)$$
$$0 = +15.7 + 18.99(1) - 44.34(2) + 0.55(3) + 24.8(4)$$

$$\text{III.,}\quad +\log PP_4 = + \cdot\cdot 105.7 + 13.8\,(1) - 33.3\,(3) + 19.5(4) - 13.8(\zeta)$$
$$\text{IV.,}\quad -\log PP_4 = - \cdot\cdot 097.8 + 20.7\,(1) - 13.2(4) - 7.5(5) - 20.7(\zeta)$$
$$\text{b.,}\quad 0 = -14.58(1) - 2.35(2) + 16.94(3) + 34.5(\zeta)$$
$$0 = +7.9 + 19.92(1) - 2.35(2) - 16.36(3) + 6.3(4) - 7.5(5)$$

Bedingungsgleichungen.

$$+15.7 = -18.99\,(1) + 44.34\,(2) - 0.55\,(3) - 24.8\,(4)$$
$$+7.9 = -19.92\,(1) + 2.35\,(2) + 16.36\,(3) - 6.3\,(4) + 7.5\,(5).$$

Correlatengleichungen.

$$(1) = -18.99\,k_1 - 19.92\,k_2$$
$$(2) = +44.34\,k_1 + 2.35\,k_2$$
$$(3) = -0.55\,k_1 + 16.36\,k_2$$
$$(4) = -24.80\,k_1 - 6.30\,k_2$$
$$(5) = + 7.50\,k_2.$$

Normalgleichungen.

$$+15.7 = +2942.0\,k_1 + 629.7\,k_2; \qquad \log k_1 = 7{,}57941 - 10;$$
$$+7.9 = +629.7\,k_1 + 765.9\,k_2; \qquad \log k_2 = 7{,}85696 - 10.$$

Richtungsverbesserungen auf P.

$$(1) = -0,''215$$
$$(2) = +0,185$$
$$(3) = +0,116$$
$$(4) = -0,139$$
$$(5) = +0,054$$
$$(\zeta) = -0,138.$$

Bringt man die gefundenen Zahlenwerte der (1), (2), $\cdots$ an die Winkel der vier Dreiecke an, und berechnet nun die Seiten, so erhält man die wahrscheinlichsten Werte derselben, nämlich in Logarithmen

$$\log PP_1 = 3{,}4303303.7 \qquad \log PP_4 = 3{,}2972098.0$$
$$\text{„}\ PP_2 = 3{,}6555536.5 \qquad \text{„}\ PP_5 = 2{,}7801177.6.$$
$$\text{„}\ PP_3 = 3{,}3613260.7$$

Berichtigt man die gemessenen Richtungen auf P und bestimmt die orientierte Richtung

$$PP_1 = 180^\circ + \varrho_{1 \cdot 2} + \zeta + (\zeta) = 33^\circ\ 54'\ 3,''790,$$

so folgt

Verbesserte gemessene	und orientierte Richtungen auf P.	
1. = −0,″215	33° 54′ 3,″790	
5. = 6° 42′ 36,″594	40° 36′ 40,″599	
2. = 96° 39′ 57,″275	130° 34′ 1,″280	
4. = 128° 45′ 30,″721	162° 39′ 34,″726	
3. = 175° 58′ 18,″616	209° 52′ 22,″621	(Nach Helmert 22,″61.)

Nach (96.) ist der mittlere Fehler einer Richtung

$$\mu = \pm 0,''24. \qquad \text{Nach Helmert } \mu = \pm 0,''23.$$

Leitet man aus μ den mittleren Fehler μ_w eines Winkels ab, so ist

$$\mu_w = \mu \sqrt{2} = \pm 0,''34.$$

Endlich findet man aus den gegebenen Coordinaten des Punktes P_1, der Seite PP_1 und ihrer Richtung auf P die Coordinaten von P, in Übereinstimmung mit der Angabe von Helmert,

$$x^m = +1992,^m560, \quad y^m = +1144,^m521.$$

Die Ausgleichung der Pothenotschen Aufgabe bei überschüssigen Beobachtungen ist sowohl in der Formelentwickelung, als auch in der Berechnung des Beispieles so ausführlich behandelt, um dem in der Methode der kleinsten Quadrate noch wenig bewanderten Praktiker die Ausführung einer solchen Arbeit vollständig klar zu machen.

Die vorstehende Behandlung der Pothenotschen Aufgabe hat unter den drei Voraussetzungen stattgefunden, dass

1.) die Richtungen auf P nach P_1, P_2, ... gleiches Gewicht haben,

2.) die Bestimmung der Lage der anvisierten Punkte gleich genau ist und

3.) die Dreiecke als in einer Ebene liegend behandelt werden können.

ad 1.) Haben die Richtungen auf P verschiedene Gewichte, welche sich aus dem Horizontabschlusse ermitteln lassen, und sind dieselben für die einzelnen Richtungen $p_1, p_2, \ldots$, so hat man vor dem Übergange zu den Normalgleichungen die rechten Seiten der Correlatengleichungen durch die Gewichte der links stehenden Verbesserungen zu dividieren. Hiernach hat man für die Correlatengleichungen

$$\begin{aligned}(1) &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \ldots,\\ (2) &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \ldots,\\ &\vdots\end{aligned}$$

wonach die Normalgleichungen in folgender Gestalt auftreten.

$$\begin{aligned}n_1 &= \left[\frac{aa}{p}\right] k_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] k_2 + \cdots,\\ n_2 &= \left[\frac{ab}{p}\right] k_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] k_2 + \cdots,\\ &\vdots\end{aligned}$$

Die Elimination der k und die Berechnung der (1), (2), .. geschieht dann auf die bekannnte Weise.

ad 2.) Haben die Lagen der anvisierten Punkte verschiedene Genauigkeit, was schon bei der Bestimmung dieser Punkte ermittelt werden muss, und bezeichnet man die lineare Unsicherheit in der Lage eines Punktes P_m mit u, den Fehler der Richtung von P nach diesem Punkte mit v und die Linie PP_m mit s, so ist der Gesamtfehler V der Richtung durch die Gleichung ausgedrückt

$$V = \sqrt{\left(\frac{u}{s.\sin 1''}\right)^2 + v^2},$$

das Gewicht desselben aber durch

$$p = \frac{1}{\left(\frac{u}{s.\sin 1''}\right)^2 + v^2}.$$

ad 3.) Müssen die Dreiecke als sphärische betrachtet werden, so wird man zum Zwecke der Bestimmungen der sphärischen Excesse eine vorläufige, als eben zu behandelnde Dreiecksberechnung mit 5-stelligen Logarithmen vornehmen. Von den betreffenden Winkeln wird alsdann nach dem Legendreschen Theoreme je $\frac{1}{3}$ der resp. Excesse subtrahiert, und es werden die Dreiecke hierauf als ebene Dreiecke behandelt; schliesslich werden nach der Ausgleichung und definitiven Seitenberechnung zu den verbesserten Winkeln die $\frac{1}{3}\,\varepsilon$ wieder hinzugefügt.

Die Methode der Aufstellung von Bedingungsgleichungen, welche durch die Entwickelungen auf den vorhergehenden Seiten für die Pothenotsche Aufgabe bei einer überschüssigen Anzahl von Beobachtungen auf dem zu bestimmenden Punkte P nach definitiv festgelegten Punkten P_1, $P_2, \ldots$ gegeben wurde, kann auch dann noch Anwendung finden, wenn diese Punkte einem unausgeglichenen Netze angehören, selbst erst vorläufig bestimmt sind, und der Punkt P an die Gesamtausgleichung angeschlossen werden soll.

Fig. 17. In dem hier vorausgesetzten Falle kommen zu den schon früher eingeführten Verbesserungen (1), (2), ... der Richtungen auf P und der Verbesserung (ζ) der errechneten Richtung an einem der Punkte P_1, $P_2, \ldots$ nach P nicht allein noch die Richtungsverbesserungen der s_1^m, $s_2^m, \ldots$ zwischen diesen Punkten selbst, nämlich (1.2), (2.1), (2.3), (3.2), ... $\{m.(m-1)\}$, sondern auch die den $\log s_1^m$, $\log s_2^m, \ldots$ aus den Bedingungsgleichungen der Netzbeobachtungen schon anhaftenden Verbesserungen hinzu, welche für jeden $\log s^m$ in ihrer Gesamtheit durch den Buchstaben V ausgedrückt werden sollen. Hiernach erhalten die Dreieckswinkel die folgenden Verbesserungen:

I. Dreieck.

$$\alpha_1 = P_1 \quad -(1.2)+(\zeta)$$
$$\beta_1 = (P_2 + (1) - (2) + (1.2) - (\zeta))$$
$$\gamma_1 = P \quad -(1) + (2)$$

II. Dreieck.

$$\alpha_2 = P_2 - (1) + (2) \quad -(1.2) + (2.1) - (2.3) + (\zeta)$$
$$\beta_2 = (P_3 + (1) \quad -(3) + (1.2) - (2.1) + (2.3) - (\zeta))$$
$$\gamma_2 = P \quad -(2) + (3)$$

III. Dreieck.

$$\alpha_3 = P_3 - (1) + (3) \quad -(1.2) + (2.1) - (2.3) + (3.2) - (3.4) + (\zeta)$$
$$\beta_3 = (P_4 + (1) \quad -(4) + (1.2) - (2.1) + (2.3) - (3.2) + (3.4) - (\zeta))$$
$$\gamma_3 = P \quad -(3) + (4)$$

IV. Dreieck.

$$\alpha_4 = P_4 - (1) + (4) \quad -(1.2) + (2.1) - (2.3) + (3.2) - (3.4) + (4.3) - (4.5) + (\zeta)$$
$$\beta_4 = (P_5 + (1) \quad -(5) + (1.2) - (2.1) + (2.3) - (3.2) + (3.4) - (4.3) + (4.5) - (\zeta))$$
$$\gamma_4 = P \quad -(4) + (5)$$

Berechnet man nun aus den Winkeln und dem $\log s^m + V$ jedes Dreiecks die log der gemeinschaftlichen Seiten und bildet aus diesen wie früher die noch (ζ) enthaltenden Gleichungen, so ist

$$\left\{\begin{array}{llllll}
0 = 0 & +(\delta\mathrm{I} - \delta\mathrm{II}_3)\,(1) & -(\delta\mathrm{I} + \delta\mathrm{II})\,(2) & +(\delta\mathrm{II} + \delta\mathrm{II}_3)\,(3) & - \\
0 = n_1 & -(\delta\mathrm{II}_2 + \delta\mathrm{III}_4)\,(1) & +(\delta\mathrm{II} + \delta\mathrm{II}_2)\,(2) & -(\delta\mathrm{II} + \delta\mathrm{III})\,(3) & +(\delta\mathrm{III} + \delta\mathrm{III}_4)\,(4) \\
0 = n_2 & -(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(1) & - & +(\delta\mathrm{III} + \delta\mathrm{III}_3)\,(3) & -(\delta\mathrm{III} + \delta\mathrm{IV})\,(4)
\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{lll}
- & -(\delta\mathrm{I}_1 + \delta\mathrm{II}_3)\,(1.2) & + \delta\mathrm{II}_3\,(2.1) \\
- & -(\delta\mathrm{II}_2 + \delta\mathrm{III}_4)\,(1.2) & +(\delta\mathrm{II}_2 + \delta\mathrm{III}_4)\,(2.1) \\
+(\delta\mathrm{IV} + \delta\mathrm{IV}_5)\,(5) & -(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(1.2) & +(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(2.1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
- \quad \delta\mathrm{II}_3\,(2.3) & - & - & - \\
-(\delta\mathrm{II}_2 + \delta\mathrm{III}_4)\,(2.3) & + \delta\mathrm{III}_4\,(3.2) & - \delta\mathrm{III}_4\,(3.4) & - \\
-(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(2.3) & +(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(3.2) & -(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(3.4) & + \delta\mathrm{IV}_5\,(4.3)
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
- & + V_1 - V_2 & +(\delta\mathrm{I}_1 + \delta\mathrm{II}_3)\,(\zeta) \\
- & + V_2 - V_3 & +(\delta\mathrm{II}_2 + \delta\mathrm{III}_4)\,(\zeta) \\
-\delta\mathrm{IV}_5\,(4.5) & + V_3 - V_4 & +(\delta\mathrm{III}_3 + \delta\mathrm{IV}_5)\,(\zeta)
\end{array}\right\}$$

Aus. diesen Gleichungen werden die $(m - 3)$, hier 2, Bedingungsgleichungen durch Elimination von (ζ) zusammengestellt, und vor der Verbindung mit den Bedingungsgleichungen des Netzes für die V die einzelnen, aus den Netzgleichungen hervorgehenden Verbesserungen eingesetzt. Das übrige geschieht alsdann auf bekannte Weise. Das auf Seite 121 und 122 unter ad 1.) bis ad 3.) Gesagte findet auch hier seine Anwendung.

II. Berechnung einer um ein Polygon gelegten Dreieckskette.

Als einfachster Fall soll die Aufgabe zuerst unter den Voraussetzungen gelöst werden, dass

1) die Kette eine einfache — ohne Diagonalen — ist, und durchgehend die Dreiecke in zwei Punkten — einer Seite — zusammenhängen,
2) sämtliche Richtungen gemessen und auf den Stationen bereits ausgeglichen sind,
3) die Seitenlängen nur von einer Grundlinie abgeleitet werden.

Mit bezug auf die Seite 121 und 122 unter ad 1.) bis ad 3.) gegebenen und auch hier anwendbaren Erörterungen kann es in der folgenden Besprechung unerwähnt bleiben, ob die gemessenen Richtungen gleiche oder verschiedene Gewichte haben, und ob der Geltungsbereich als ebene, sphärische oder sphäroidische Fläche anzusehen ist.

Sind P Punkte durch L Linien zu geschlossenen Figuren verbunden, so erhält man

$$\begin{array}{l}(L - P + 1) \text{ Winkelgleichungen,} \\ (L - 2P + 3) \text{ Seitengleichungen*).}\end{array}$$

Fig. 18. Hat nun das Polygon p Punkte, und sind zur Bildung der umschliessenden Dreieckskette noch weitere p Punkte verwendet worden, welche zusammen durch $4p$ Linien zu $2p$ Dreiecken und dem eingeschlossenen Polygone verbunden sind, so wird $L = 4p$, $P = 2p$, und die obigen Ausdrücke für die Anzahl der Bedingungsgleichungen erhalten die folgenden Werte

$$\begin{array}{r}
L - P + 1 = 4p - 2p + 1 = 2p + 1 \\
L - 2P + 3 = 4p - 4p + 3 = \quad 3 \\
\hline
\text{Summe der Bedingungsgleichungen} = 2p + 4.
\end{array}$$

---

*) Gerling. Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie etc. etc. Hamburg und Gotha 1843. pag. 269 bis 278.

Auf die $2p$ Dreiecke kommen aber $2p$ Winkelgleichungen und nur 1 Seitengleichung, mithin beansprucht das Polygon 1 Winkelgleichung und 2 Seitengleichungen, welche bei der Ausgleichung berücksichtigt werden müssen, wenn alle Widersprüche beseitigt werden sollen.

Ist die zur Aufstellung der Seitengleichugen notwendige, vorläufige Berechnung der Seiten, einschliesslich der als Polygonseiten dienenden Dreiecksseiten, ausgeführt, und sind darauf die $(2p + 1)$ Bedingungsgleichungen gebildet, so wird man zur Darstellung der noch fehlenden 2 Seitengleichungen von einem Polygonpunkte P_0 aus die $(p-3)$ Diagonalen ziehen *), und von einem der beiden Dreiecke mit zwei vorläufig gegebenen Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ausgehend, die $(p - 2)$ Polygondreiecke berechnen. Giebt man nun den $(p - 3)$ errechneten, diagonalen Richtungen an P_0 die Verbesserungen $(\zeta)_1$, $(\zeta)_2, \ldots (\zeta)_{p-3}$, so wird man, ähnlich wie bei der Pothenotschen Aufgabe im Anschlusse an ein noch unausgeglichenes Dreiecksnetz, $(p - 1)$ Seitengleichungen aufstellen können, in welchen $(p - 3)$ Verbesserungen (ζ) enthalten sind, nach deren Elimination also noch 2 von (ζ) freie Seitengleichungen übrig bleiben. Die noch fehlende Winkelgleichung erhält man aus der Vergleichung der durch die Seitenzahl p und die Summe der Excesse der Polygondreiecke errechneten mit der durch Messung erhaltenen Winkelsumme des Polygons frei von jedem (ζ). Fügt man diese 3 Polygongleichungen zu den $(2p + 1)$ Gleichungen der Dreieckskette hinzu und führt mit diesen $(2p + 4)$ Bedingungsgleichungen die weitere Berechnung aus, so erhält man für die Richtungsverbesserungen solche Ausdrücke, dass alle Widersprüche beseitigt, und den Seiten und Winkeln bezw. Richtungen die wahrscheinlichsten Werte gegeben werden.

Der Verfasser hatte vorstehendes Verfahren der Ausgleichung schon 1868 in den astronomischen Nachrichten Nr. 1697 gegeben. In der 1882 publicierten, mecklenburgischen Landesvermessung hat dieselbe Ausgleichungsmethode in fünf Fällen Band I. pag. 105, 110, 111 und 122 Anwendung gefunden.

Fig. 19. Anders gestaltet sich die Sache bei grossen, ausgedehnten Landesvermessungen, wo die Dreieckskette um ein Polygon von bedeutendem Flächeninhalte jährlich nur stückweise gemessen werden kann, dieses Kettenstück aber zur alsbaldigen weiteren Benutzung auch berechnet werden muss. Ist nun durch die Messung des letzten Kettenstückes das Polygon zum Schlusse gebracht, so wird bei der darauf folgenden Ausgleichung, da die 3 Bedingungsgleichungen des Polygons und ausserdem noch andere Zwangsbedingungen hinzugezogen werden müssen, um alle Widersprüche zu beseitigen, die Gesamtheit der vernachlässigten Verbesserungen hier aufgehäuft. Ist dieses Verfahren nun auch vom wissenschaftlichen Standpunkte aus nicht zu rechtfertigen, so liegen doch hier praktische Gründe vor, welche ein solches als zulässig erscheinen lassen. Da aber die Messungen selbst ganz unabhängig von der Figur der Erde sind, so darf man bei der Ausgleichung keine fremden Elemente, etwa in Gestalt von geographischen Coordinaten (vergl. Astr. Nachr. Jahrg. 1868 Nr. 1690) einführen, sondern muss unmittelbar die Winkel oder Richtungsbeobachtungen ausgleichen.

Da die geographischen Coordinaten der Endpunkte der Anfangs- und der Schlussseite des letzten Kettenstückes bereits als definitiv gegeben sind, so wird man nach den Besselschen Formeln — Seite 86 und 88 — die geodätische Linie und ihre Azimute zwischen einem Endpunkte P_a der Anfangs- und einem Endpunkte P_s der Schlussseite berechnen. Hierdurch ist das Polygon so in zwei Teile zerlegt, dass nur noch der kleine, dem Schlussstücke der Kette anliegende Teil bei der folgenden Ausgleichung Berücksichtigung findet, wobei zu beachten ist, dass hierbei mindestens 3 zusammenhängende Seiten und 6 Azimute als definitive Angaben auftreten. Bei der Bildung

*) Dass alle Diagonalen von einem Punkte aus gezogen werden, ist übrigens nicht notwendig, nur muss jede eine fingierte Richtungsverbesserung (ζ) erhalten.

der Polygondreiecke werden die Diagonalen so gezogen, wie dieselben für die Gestalt der Dreiecke am zweckmässigsten liegen. Auch kann man, wenn das Dreieck mit der Seite $P_a P_8$ eine zu ungünstige Gestalt erhält, diese Seite noch zerlegen; die schliessliche Anzahl der Bedingungsgleichungen des Polygons bleibt deshalb doch 3.

Die Königlich preussische Landesaufnahme gleicht auch das letzte Kettenstück zuerst ganz unabhängig aus, damit es für wissenschaftliche Zwecke benutzt werden kann, und fügt dann erst die weiteren Bedingungsgleichungen zu einer nochmaligen Gesamtausgleichung hinzu. Da ein grosser Teil der vorhergehenden Eliminationsarbeit aber hierbei benutzt werden kann, so ist die Neurechnung in verhältnissmässig kurzer Zeit auszuführen. Dieses Verfahren gewährt den Nutzen, die Richtungsänderungen nach beiden Seiten hin einer Vergleichung unterziehen zu können.

III. Übertragung der gegebenen Seite S^m zwischen den unzugänglichen Punkten P und P_1 und ihrer Richtung R an P auf die Seite s^m zwischen den zugänglichen Punkten A und B und deren Richtung ϱ in A.

(Problem der zwei Punkte.)

Fig. 20. Sind an den Punkten A und B die Winkel zwischen den 3 anderen Punkten gemessen, bezw. aus den gemessenen Richtungen abgeleitet, nämlich $\angle PAB = \beta$, $\angle BAP_1 = \gamma$, $\angle P_1BA = \delta$, $\angle ABP = \alpha$, und setzt man $\angle P_1PA = \zeta$, $\angle AP_1P = \zeta_1$, $\angle BPP_1 = \psi$, $\angle PP_1B = \psi_1$, so folgt

$$\angle BPA = 180^\circ - (\alpha + \beta), \quad \angle AP_1B = 180^\circ - (\gamma + \delta),$$

$$\tfrac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma), \quad \tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta).$$

Man wird übrigens sofort erkennen, dass von den 4 unbekannten Winkeln ζ, ζ_1, ψ, ψ_1 je 3 aus dem 4. und den gegebenen Winkeln α, β, γ und δ hergestellt werden können.

Nimmt man zuerst die Länge von AB als Einheit, so erhält man

$$a_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad b_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad c_1 = \frac{\sin\gamma}{\sin(\gamma+\delta)}; \quad d_1 = \frac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = \frac{a_1 - d_1}{a_1 + d_1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi) = \frac{b_1 - c_1}{b_1 + c_1}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta).$$

Da nun $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta)$ und $\frac{1}{2}(\psi_1 + \psi)$ bekannt sind, so findet man aus den halben Summen und halben Differenzen sofort ζ, ζ_1, ψ, ψ_1, und kann nun von $PP_1 = S^m$ ausgehend auf vier verschiedenen Wegen $AB = s^m$ berechnen. Für die Richtung ϱ der Linie s^m im Punkte A ist aber

$$\varrho = 180^\circ + R + \zeta + \beta.$$

Setzt man

$$\frac{a_1}{d_1} = \frac{\sin\alpha\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta\sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\varphi,$$

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{\sin\beta\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma\sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{tang}\varphi_1,$$

und beachtet, dass $1 = \operatorname{tang} 45^\circ$ ist, so erhält man

$$\tang \tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = \frac{\tang \varphi - \tang 45^\circ}{\tang \varphi + \tang 45^\circ} \cotg \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \tang(\varphi - 45^\circ) \cotg \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$
$$= \cotg(\varphi + 45^\circ) \cotg \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi) = \frac{\tang \varphi_1 - \tang 45^\circ}{\tang \varphi_1 + \tang 45^\circ} \cotg \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta) = \tang(\varphi_1 - 45^\circ) \cotg \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta)$$
$$= \cotg(\varphi_1 + 45^\circ) \cotg \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta).$$

Noch einfacher wird in den meisten Fällen die Lösung mit Anwendung der Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen. Sucht man zu $\log \frac{a_1}{d_1}$ (als Argument B) das A und dann (als Argument A) das B aus den Tafeln, so ist

$$\log \tang \tfrac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = A_B + \mathrm{cpl}\, B_A + \log \cotg \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

Ebenso erhält man mit $\frac{b_1}{c_1}$

$$\log \tang \tfrac{1}{2}(\psi_1 - \psi) = A'_{B'} + \mathrm{cpl}\, B'_{A'} + \log \cotg \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta).$$

Es ist wohl selbstverständlich, dass man für die Auflösung nur $\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta)$ oder nur $\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi)$ zu kennen braucht. Das Endresultat findet aber in beiden Ausrechnungen eine Controle.

Liegt das Viereck auf einer sphärischen oder sphäroidischen Fläche, so wird man nach vorangegangener, vorläufiger Dreiecksberechnung die Excesse der einzelnen Dreiecke auf bekannte Weise bestimmen und weiter nach dem Legendreschen Satze verfahren.

Für die Richtungsbestimmung ϱ in A ist sodann

$$\varepsilon'' = a^{m2} \sin(R + \zeta) \cos(R + \zeta) \frac{1}{2\, RN \sin 1''},$$

und

$$\varrho = 180^\circ + R + \zeta + \beta - \varepsilon.$$

Für die Richtungsbestimmung ϱ_1 in B aber ist

$$\varepsilon_1'' = s^{m2} \sin \varrho \cos \varrho \frac{1}{2\, RN \sin 1''},$$

und schliesslich

$$\varrho_1 = 180^\circ + \varrho - \varepsilon_1.$$

Beispiel.

Gegeben.	Gemessen.	Abgeleitet.
$\log S^m = 3{,}9486329$	$\alpha = 43^\circ\ 27'\ 18''$	$(\alpha + \beta) = 105^\circ\ 10'\ 47''$
	$\beta = 61^\circ\ 43'\ 29''$	$(\gamma + \delta) = 65^\circ\ 23'\ 11''$
$R = 67^\circ\ 48'\ 13''$	$\gamma = 37^\circ\ 8'\ 41''$	$(\beta + \gamma) = 98^\circ\ 52'\ 10''$
	$\delta = 28^\circ\ 14'\ 30''$	$\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 40^\circ\ 33'\ 55''$

Winkelberechnung.

$\log \sin \alpha = 9{,}8374525$
$\log \sin (\gamma + \delta) = 9{,}9586295$
$\text{cpl} \log \sin \delta = 0{,}3249630$
$\text{cpl} \log \sin (\alpha + \beta) = 0{,}0154235$
$\text{l.} \frac{a_1}{d_1} = \log \text{tang}\, \varphi = 0{,}1364685$

$\varphi = 53^\circ\ 51'\ 26,''81$
$\varphi - 45^\circ = 8^\circ\ 51'\ 26,''81$

$\text{l. tang}(\varphi - 45^\circ) = 9{,}1926650$
$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 9{,}9325007$
$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = 9{,}1251657$

$\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = 7^\circ\ 35'\ 54,''84$
$\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 40^\circ\ 33'\ 55,''00$
$\zeta_1 = 48^\circ\ 9'\ 49,''84$
$\zeta = 32^\circ\ 58'\ 0,''16$

$180^\circ + R = 247^\circ\ 48'\ 13,''00$
$\zeta = 32^\circ\ 58'\ 0,''16$
$\beta = 61^\circ\ 43'\ 29,''00$
$\varrho = 342^\circ\ 29'\ 42,''16$

Seitenberechnung.

$\log S^m = 3{,}9486329$	$\log S^m = 3{,}9486329$
$\text{cpl} \log \sin (\beta + \gamma) = 0{,}0052245$	$\text{cpl} \log \sin (\beta + \gamma) = 0{,}0052245$
$\log \sin \zeta_1 = 9{,}8721885$	$\log \sin \zeta = 9{,}7357200$
$\log a^m = 3{,}8260459$	$\log d^m = 3{,}6895774$
$\text{cpl} \log \sin \alpha = 0{,}1625475$	$\text{cpl} \log \sin \delta = 0{,}3249630$
$\log \sin \beta = 9{,}9448191$	$\log \sin \gamma = 9{,}7809150$
$\log \sin (\alpha + \beta) = 9{,}9845765$	$\log \sin (\gamma + \delta) = 9{,}9586295$
$\log b^m = 3{,}9334125$	$\log c^m = 3{,}7954554$
$\log s^m = 3{,}9731699$	$\log s^m = 3{,}9731699$

Berechnung von $\frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta)$ mit Gaussischen Logarithmen.

$\log \frac{a_1}{d_1} = 0{,}1364685 = B$	$A_B = 9{,}5672677$
$= A$	$\text{cpl}\, B_A = 9{,}6253973$
	$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta) = 9{,}9325007$
	$\log \text{tang}\, \frac{1}{2}(\zeta_1 - \zeta) = 9{,}1251657$

Constanten.

Basis der natürlichen Logarithmen:

$e = 2{,}7182818285$; $\log e = 0{,}4342944.819$

Modulus der Briggischen Logarithmen:

$M = 0{,}4342944819$; $\log M = 9{,}6377843.113 - 10$

Peripherie des Kreises für den Durchmesser 1:

$\pi = 3{,}1415926536$; $\log \pi = 0{,}4971498.727$

$\log \sin 1^\circ = 8{,}2418553.184 - 10$; $\log \frac{\pi}{180} = 8{,}2418773.676 - 10$

$\log \sin 1' = 6{,}4637261.109 - 10$; $\log \frac{\pi}{180.60} = 6{,}4637261.172 - 10$

$\log \sin 1'' = 4{,}6855748.668 - 10$; $\log \frac{\pi}{180.60.60} = 4{,}6855748.668 - 10.$

Logarithmen zur Verwandlung verschiedener Längenmasse in Meter.*)

Badische Rute = 10 Fuss	0,4771212.5
Bayerische Rute = 10 Fuss	0,4651733.3
Braunschweigische Rute = 16 Fuss	0,6595167.0
Dänische Rute = 10 Fuss	0,4967269.7
Englische Rute = 5,5 Yards**) = 16½ Fuss	0,7014910.6
Frankfurter Rute = 12½ Fuss	0,5511608.3
Französische Toise = 6 Fuss	0,2898199.3
Hamburger (Geest-) Rute = 16 Fuss	0,6613529.8
Hannoversche Rute = 16 Fuss	0,6696436.2
Hessen-darmst. Klafter = 10 Fuss	0,3979400.1
Homburgische Rute = 12 (Frankfurter) Fuss 1,54 Zoll	0,5380519.4
Kurhessische Rute = 14 Fuss	0,6008375.7
Mecklenburgische Rute = 16 Fuss	0,6680158.8
Nassauische Rute = 10 Fuss	0,6989700.0
Österreichische Klafter = 6 Fuss	0,2779907.9
Oldenburgische Rute = 10 Fuss	0,4711141.0
Preussische Rute = 12 Fuss	0,5759082.2
Russischer Saschehn = 7 Fuss	0,3291051.6
Sächsische Rute = 15½ Fuss	0,6329680.8
Schweizer Rute = 10 Fuss	0,4771212.5
Württembergische Rute = 10 Fuss	0,4571099.1.

Das metrische System ist in Europa bis jetzt gesetzlich eingeführt in Belgien, Deutschland, Frankreich, Griechenland, Italien, Niederlande, Norwegen, Österreich-Ungarn, Portugal, Rumänien, Schweiz, Serbien, Spanien. Facultativ ist es in Schweden und in der Türkei.

*) Die Zahlenangaben sind entnommen aus „F. G. Gauss. Fünfstellige, vollständige, logarithmische und trigonometrische Tafeln. Sechste Auflage. Berlin, 1875.“ Seite 134.

**) Nach dem in „Albrecht. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit fünf Decimalstellen. Berlin, 1884.“ Seite 167 aufgenommenen Wert für das Yard folgt für die englische Rute der Verwandlungslogarithmus = 0,7014950.1.

Vierter Abschnitt.

TAFELN

zur Berechnung geodätischer Coordinaten

von

36° bis 71°

der geographischen Breite.

Die Constanten des Erdsphäroides.

Den Tafeln liegen die Besselschen Elemente und das Meter als Längeneinheit zu grunde.

Die grosse Halbaxe der Meridianellipse $= a =$ 6377397,156 m; $\log a =$ 6,8046434.637

Die kleine Halbaxe der Meridianellipse $= b =$ 6356078,963 m; $\log b =$ 6,8031892.839

Die Länge des Meridianquadranten $= Q =$ 10000855,765 m; $\log Q =$ 7,0000371.638

Die Excentricität $= \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = e$; $\log e^2 =$ 7,8244104.237-10

$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$; $\log (1 - e^2) =$ 9,9970916.404-10

Abplattung $= \frac{a - b}{a} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = p' = \frac{1}{299{,}152813}$; $\log p' =$ 7,5241069.093-10

$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} = n' =$ 0,0016741.848; $\log n' =$ 7,2238033.949-10

Radius der Kugel, welche mit dem Erdsphäroide gleiche Oberfläche hat,
$= a\left(1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{17}{360} e^4 - \ldots\right)$ $= R_1 =$ 6370289,511 m; $\log R_1 =$ 6,8041591.702

Radius der Kugel, welche mit dem Erdsphäroide gleichen kubischen Inhalt hat, $= \sqrt[3]{a^2 b}$ $= R_2 =$ 6370283,158 m; $\log R_2 =$ 6,8041587.371

Mittel der 3 Halbaxen $= \frac{2a + b}{3}$ $= R_3 =$ 6370291,092 m; $\log R_3 =$ 6,8041592.780

Eine geographische Meile = 7420,438538 m; log = 3,8704295.722

Oberfläche des Erdsphäroides = 509950714,3 qkm; log = 8,7075282.044

Kubikinhalt des Erdsphäroides = 1082841322000 ckm; log = 12.0345648.206.

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1"		(2) log N sin 1"	
36° 0'	39 85146,054	18491,460	1,4888 138.9	120.7	1,4907 196.4	40.2
10	40 03637,514	18491,973	259.6	120.9	236.6	40.3
20	22129,487	18492,488	380.5	121.1	276.9	40.4
30	40621,975	18493,005	501.6	121.3	317.3	40.4
40	59114,980	18493,522	622.9	121.6	357.7	40.5
50	77608,502	18494,040	744.5	121.8	398.2	40.6
37 0	40 96102,542	18494,559	1,4888 866.3	121.9	1,4907 438.8	40.7
10	41 14597,101	18495,078	988.2	122.2	479.5	40.7
20	33092,179	18495,599	1,4889 110.4	122.4	520.2	40.8
30	51587,778	18496,121	232.8	122.6	561.0	40.9
40	70083,899	18496,643	355.4	122.7	601.9	40.9
50	88580,542	18497,166	478.1	123.0	642.8	41.0
38 0	42 07077,708	18497,691	1,4889 601.1	123.1	1,4907 683.8	41.0
10	25575,399	18498,216	724.2	123.3	724.8	41.1
20	44073,615	18498,741	847.5	123.5	765.9	41.2
30	62572,356	18499,267	971.0	123.6	807.1	41.2
40	81071,623	18499,794	1,4890 094.6	123.8	848.3	41.2
50	99571,417	18500,322	218.4	124.0	889.5	41.4
39 0	43 18071,739	18500,851	1,4890 342.4	124.1	1,4907 930.9	41.3
10	36572,590	18501,380	466.5	124.3	972.2	41.5
20	55073,970	18501,909	590.8	124.3	1,4908 013.7	41.4
30	73575,879	18502,439	715.1	124.6	055.1	41.5
40	92078,318	18502,970	839.7	124.7	096.6	41.6
50	44 10581,288	18503,502	964.4	124.8	138.2	41.6
40 0	44 29084,790	18504,034	1,4891 089.2	125.0	1,4908 179.8	41.7
10	47588,824	18504,567	214.2	125.1	221.5	41.7
20	66093,391	18505,100	339.3	125.2	263.2	41.7
30	84598,491	18505,634	464.5	125.4	304.9	41.8
40	45 03104,125	18506,169	589.9	125.4	346.7	41.8
50	21610,294	18506,704	715.3	125.6	388.5	41.9
41 0	45 40116,998	18507,239	1,4891 840.9	125.6	1,4908 430.4	41.8
10	58624,237	18507,774	966.5	125.8	472.2	42.0
20	77132,011	18508,309	1,4892 092.3	125.8	514.2	41.9
30	95640,320	18508,846	218.1	126.0	556.1	42.0
40	46 14149,166	18509,383	344.1	126.0	598.1	42.0
50	32658,549	18509,921	470.1	126.1	640.1	42.1
42 0	46 51168,470	18510,459	1,4892 596.2	126.2	1,4908 682.2	42.0

$\log R = (1)^a = (1) + 5{,}3144\ 251.3$; $\log N = 5{,}3144\ 251.3 + (2) = (2)^a$

von Functionen der Krümmungsradien.

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ 1,.......—10		(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}$ 4,.......—10		(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}$ 4,......—10		(6) $\log \frac{1}{2\,RN}$ 6,......—20	
36° 0'	1,4050 113.4	160.9	4,3864 506.2	80.5	4,06 363	80	6,0905 9	2
10	1,4049 952.5	161.2	425.7	80.6	443	79	7	2
20	791.3	161.5	345.1	80.7	522	77	5	1
30	629.8	161.7	264.4	80.9	599	76	4	2
40	468.1	162.1	183.5	81.1	675	74	2	1
50	306.0		102.4		749		1	
		162.4		81.2		72		2
37 0	1,4049 143.6	162.6	4,3864 021.2	81.2	4,06 821	71	6,0904 9	2
10	1,4048 981.0	162.9	4,3863 940.0	81.5	892	70	7	1
20	818.1	163.2	858.5	81.6	962	67	6	2
30	654.9	163.5	776.9	81.7	4,07 029	66	4	2
40	491.4	163.6	695.2	81.8	095	65	2	1
50	327.8		613.4		160		1	
		164.0		82.0		63		2
38 0	1,4048 163.8	164.1	4,3863 531.4	82.1	4,07 223	61	6,0903 9	2
10	1,4047 999.7	164.4	449.3	82.2	284	60	7	1
20	835.3	164.7	367.1	82.3	344	58	6	2
30	670.6	164.8	284.8	82.4	402	57	4	1
40	505.8	165.0	202.4	82.6	459	55	3	2
50	340.8		119.8		514		1	
		165.4		82.6		54		2
39 0	1,4047 175.4	165.4	4,3863 037.2	82.8	4,07 568	52	6,0902 9	1
10	010.0	165.8	4,3862 954.4	82.8	620	51	8	2
20	1,4046 844.2	165.7	871.6	82.9	671	49	6	2
30	678.5	166.1	788.7	83.1	720	47	4	1
40	512.4	166.3	705.6	83.1	767	46	3	2
50	346.1		622.5		813		1	
		166.4		83.2		45		2
40 0	1,4046 179.7	166.7	4,3862 539.3	83.3	4,07 858	43	6,0901 9	1
10	013.0	166.8	456.0	83.4	901	41	8	2
20	1,4045 846.2	166.9	372.6	83.5	942	40	6	2
30	679.3	167.2	289.1	83.6	982	38	4	1
40	512.1	167.2	205.5	83.6	4,08 020	37	3	2
50	344.9		121.9		057		1	
		167.5		83.7		36		2
41 0	1,4045 177.4	167.4	4,3862 038.2	83.8	4,08 093	34	6,0900 9	1
10	010.0	167.8	4,3861 954.4	83.8	127	32	8	2
20	1,4044 842.2	167.7	870.6	83.9	159	31	6	2
30	674.5	168.0	786.7	84.0	190	29	4	1
40	506.5	168.0	702.7	84.0	219	28	3	2
50	338.5		618.7		247		1	
		168.2		84.0		27		2
42 0	1,4044 170.3	168.2	4,3861 534.7	84.2	4,08 274	25	6,0899 9	1

$(3) + 8{,}5958\,917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6\,RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\,8 - 10$

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1″		(2) log N sin 1″	
		18509,921		126.1		42.1
42° 0′	46 51168,470		1,4892 596.2		1,4908 682.2	
		18510,459		126.2		42.0
10	69678,929		722.4		724.2	
		18510,997		126.3		42.1
20	88189,926		848.7		766.3	
		18511,536		126.4		42.1
30	47 06701,462		975.1		808.4	
		18512,075		126.4		42.2
40	25213,537		1,4893 101.5		850.6	
		18512,614		126.5		42.1
50	43726,151		228.0		892.7	
		18513,153		126.5		42.2
43 0	47 62239,304		1,4893 354.5		1,4908 934.9	
		18513,692		126.6		42.2
10	80752,996		481.1		977.1	
		18514,231		126.6		42.2
20	99267,227		607.7		1,4909 019.3	
		18514,770		126.7		42.2
30	48 17781,997		734.4		061.5	
		18515,311		126.7		42.3
40	36297,308		861.1		103.8	
		18515,853		126.8		42.2
50	54813,161		987.9		146.0	
		18516,393		126.8		42.3
44 0	48 73329,554		1,4894 114.7		1,4909 188.3	
		18516,933		126.8		42.3
10	91846,487		241.5		230.6	
		18517,474		126.9		42.3
20	49 10363,961		368.4		272.9	
		18518,015		126.8		42.2
30	28881,976		495.2		315.1	
		18518,556		126.9		42.3
40	47400,532		622.1		357.4	
		18519,097		126.9		42.3
50	65919,629		749.0		399.7	
		18519,638		126.9		42.3
45 0	49 84439,267		1,4894 875.9		1,4909 442.0	
		18520,179		126.9		42.3
10	50 02959,446		1,4895 002.8		484.3	
		18520,720		126.9		42.3
20	21480,166		129.7		526.6	
		18521,261		126.9		42.3
30	40001,427		256.6		568.9	
		18521,802		126.9		42.3
40	58523,229		383.5		611.2	
		18522,344		126.8		42.3
50	77045,573		510.3		653.5	
		18522,885		126.9		42.3
46 0	50 95568,458		1,4895 637.2		1,4909 695.8	
		18523,427		126.8		42.3
10	51 14091,885		764.0		738.1	
		18523,968		126.8		42.2
20	32615,853		890.8		780.3	
		18524,508		126.8		42.3
30	51140,361		1,4896 017.6		822.6	
		18525,048		126.7		42.2
40	69665,409		144.3		864.8	
		18525,588		126.7		42.3
50	88190,997		271.0		907.1	
		18526,128		126.6		42.2
47 0	52 06717,125		1,4896 397.6		1,4909 949.3	
		18526,669		126.6		42.2
10	25243,794		524.2		991.5	
		18527,209		126.6		42.2
20	43771,003		650.8		1,4910 033.7	
		18527,749		126.5		42.1
30	62298,752		777.3		075.8	
		18528,288		126.4		42.2
40	80827,040		903.7		118.0	
		18528,827		126.3		42.1
50	99355,867		1,4897 030.0		160.1	
		18529,366		126.3		42.1
48 0	53 17885,233		1,4897 156.3		1,4910 202.2	
		18529,905		126.2		42.0

log R = (1)^a = (1) + 5,3144 251.3; log$N$ = 5,3144 251.3 + (2) = (2)^a

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2RN \sin 1''}$ 1,.......—10	Δ	(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2R}$ 4,.......—10	Δ	(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4R}$ 4,.......—10	Δ	(6) $\log \frac{1}{2RN}$ 6,.......—20	Δ
		168.2		84.0		27		2
42° 0′	1,4044 170.3	168.2	4,3861 534.7	84.2	4,08 274	25	6,0899 9	1
10	002.1	168.4	450.5	84.2	299	23	8	2
20	1,4043 833.7	168.5	366.3	84.3	322	22	6	2
30	665.2	168.6	282.0	84.2	344	21	4	2
40	496.6	168.6	197.8	84.4	365	19	2	1
50	328.0	168.7	113.4	84.3	384	17	1	2
43 0	1,4043 159.3	168.8	4,3861 029.1	84.4	4,08 401	16	6,0898 9	2
10	1,4042 990.5	168.8	4,3860 944.7	84.4	417	15	7	1
20	821.7	168.9	860.3	84.5	432	13	6	2
30	652.8	169.0	775.8	84.4	445	12	4	2
40	483.8	169.0	691.4	84.6	457	10	2	1
50	314.8	169.1	606.8	84.5	467	9	1	2
44 0	1,4042 145.7	169.1	4,3860 522.3	84.5	4,08 476	7	6,0897 9	2
10	1,4041 976.6	169.2	437.8	84.6	483	6	7	1
20	807.4	169.0	353.2	84.6	489	4	6	2
30	638.4	169.2	268.6	84.6	493	3	4	2
40	469.2	169.2	184.0	84.6	496	1	2	2
50	300.0	169.2	099.4	84.6	497	0	0	1
45 0	1,4041 130.8	169.2	4,3860 014.8	84.6	4,08 497	1	6,0896 9	2
10	1,4040 961.6	169.2	4,3859 930.2	84.6	496	3	7	2
20	792.4	169.2	845.6	84.6	493	5	5	1
30	623.2	169.2	761.0	84.6	488	6	4	2
40	454.0	169.1	676.4	84.5	482	7	2	2
50	284.9	169.2	591.9	84.6	475	9	0	1
46 0	1,4040 115.7	169.1	4,3859 507.3	84.5	4,08 466	11	6,0895 9	2
10	1,4039 946.6	169.0	422.8	84.6	455	12	7	2
20	777.6	169.1	338.2	84.5	443	13	5	1
30	608.5	168.9	253.7	84.5	430	15	4	2
40	439.6	169.0	169.2	84.4	415	16	2	2
50	270.6	168.8	084.8	84.4	399	18	0	1
47 0	1,4039 101.8	168.8	4,3859 000.4	84.4	4,08 381	19	6,0894 9	2
10	1,4038 933.0	168.8	4,3858 916.0	84.4	362	21	7	2
20	764.2	168.6	831.6	84.4	341	22	5	2
30	595.6	168.6	747.2	84.2	319	24	3	1
40	427.0	168.4	663.0	84.2	295	25	2	2
50	258.6	168.4	578.8	84.2	270	27	0	2
48 0	1,4038 090.2	168.2	4,3858 494.6	84.2	4,08 243	28	6,0893 8	1

$(3) + 8{,}5958\,917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\,8 - 10$

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m	Δ	(1) log R sin 1″	Δ	(2) log N sin 1″	Δ
		18529,366		126.3		42.1
48° 0′	53 17885,233	18529,905	1,4897 156.3	126.2	1,4910 202.2	42.0
10	36415,138	18530,444	282.5	126.2	244.2	42.1
20	54945,582	18530,982	408.7	126.0	286.3	42.0
30	73476,564	18531,519	534.7	126.0	328.3	42.0
40	92008,083	18532,056	660.7	125.9	370.3	42.0
50	54 10540,139	18532,593	786.6	125.7	412.3	41.9
49 0	54 29072,732	18533,130	1,4897 912.3	125.7	1,4910 454.2	41.9
10	47605,862	18533,666	1,4898 038.0	125.6	496.1	41.8
20	66139,528	18534,202	163.6	125.4	537.9	41.8
30	84673,730	18534,737	289.0	125.4	579.7	41.8
40	55 03208,467	18535,271	414.4	125.2	621.5	41.8
50	21743,738	18535,805	539.6	125.1	663.3	41.7
50 0	55 40279,543	18536,339	1,4898 664.7	125.0	1,4910 705.0	41.6
10	58815,882	18536,873	789.7	124.8	746.6	41.6
20	77352,755	18537,406	914.5	124.8	788.2	41.6
30	95890,161	18537,937	1,4899 039.3	124.5	829.8	41.5
40	56 14428,098	18538,469	163.8	124.5	871.3	41.5
50	32966,567	18539,000	288.3	124.3	912.8	41.5
51 0	56 51505,567	18539,530	1,4899 412.6	124.1	1,4910 954.3	41.3
10	70045,097	18540,059	536.7	124.0	995.6	41.4
20	88585,156	18540,588	660.7	123.8	1,4911 037.0	41.2
30	57 07125,744	18541,116	784.5	123.7	078.2	41.3
40	25666,860	18541,644	908.2	123.5	119.5	41.1
50	44208,504	18542,171	1,4900 031.7	123.3	160.6	41.1
52 0	57 62750,675	18542,697	1,4900 155.0	123.1	1,4911 201.7	41.1
10	81293,372	18543,223	278.1	123.0	242.8	41.0
20	99836,595	18543,748	401.1	122.8	283.8	40.9
30	58 18380,343	18544,271	523.9	122.5	324.7	40.9
40	36924,614	18544,794	646.4	122.4	365.6	40.7
50	55469,408	18545,316	768.8	122.2	406.3	40.8
53 0	58 74014,724	18545,837	1,4900 891.0	122.0	1,4911 447.1	40.6
10	92560,561	18546,358	1,4901 013.0	121.8	487.7	40.6
20	59 11106,919	18546,878	134.8	121.6	528.3	40.6
30	29653,797	18547,398	256.4	121.4	568.9	40.4
40	48201,195	18547,915	377.8	121.1	609.3	40.4
50	66749,110	18548,431	498.9	120.9	649.7	40.3
54 0	59 85297,541	18548,947	1,4901 619.8	120.7	1,4911 690.0	40.3

$\log R = (1)^a = (1) + 5{,}3144\,251.3$; $\log N = 5{,}3144\,251.3 + (2) = (2)^a$

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ 1,…….—10		(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}$ 4,…….—10		(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}$ 4,……—10		(6) $\log \frac{1}{2\,RN}$ 6,……—20	
		168.4		84.2		27		2
48° 0′	1,4038 090.2		4,3858 494.6		4,08 243		6,0893 8	
		168.2		84.2		28		1
10	1,4037 922.0		410.4		215		7	
		168.3		84.1		29		2
20	753.7		326.3		186		5	
		168.0		84.0		31		2
30	585.7		242.3		155		3	
		168.0		84.0		33		1
40	417.7		158.3		122		2	
		167.9		83.9		34		2
50	249.8		074.4		088		0	
		167.6		83.8		36		2
49 0	1,4037 082.2		4,3857 990.6		4,08 052		6,0892 8	
		167.6		83.8		37		1
10	1,4036 914.6		906.8		015		7	
		167.4		83.8		39		2
20	747.2		823.0		4,07 976		5	
		167.2		83.6		40		2
30	580.0		739.4		936		3	
		167.2		83.6		41		1
40	412.8		655.8		895		2	
		167.0		83.4		43		2
50	245.8		572.4		852		0	
		166.8		83.4		45		2
50 0	1,4036 079.0		4,3857 489.0		4,07 807		6,0891 8	
		166.6		83.4		46		1
10	1,4035 912.4		405.6		761		7	
		166.4		83.2		48		2
20	746.0		322.4		713		5	
		166.4		83.2		49		2
30	579.6		239.2		664		3	
		166.0		83.0		51		1
40	413.6		156.2		613		2	
		166.0		83.0		52		2
50	247.6		073.2		561		0	
		165.8		82.8		54		2
51 0	1,4035 081.8		4,3856 990.4		4,07 507		6,0890 8	
		165.4		82.8		55		1
10	1,4034 916.4		907.6		452		7	
		165.4		82.6		57		2
20	751.0		825.0		395		5	
		165.0		82.6		58		2
30	586.0		742.4		337		3	
		165.0		82.4		60		1
40	421.0		660.0		277		2	
		164.6		82.4		62		2
50	256.4		577.6		215		0	
		164.4		82.2		63		2
52 0	1,4034 092.0		4,3856 495.4		4,07 152		6,0889 8	
		164.2		82.0		64		1
10	1,4033 927.8		413.4		088		7	
		164.0		82.0		66		2
20	763.8		331.4		022		5	
		163.7		81.9		68		2
30	600.1		249.5		4,06 954		3	
		163.4		81.6		69		1
40	436.7		167.9		885		2	
		163.1		81.7		71		2
50	273.6		086.2		814		0	
		163.0		81.4		73		1
53 0	1,4033 110.6		4,3856 004.8		4,06 741		6,0888 9	
		162.6		81.4		74		2
10	1,4032 948.0		4,3855 923.4		667		7	
		162.4		81.2		75		2
20	785.6		842.2		592		5	
		162.2		81.0		78		1
30	623.4		761.2		514		4	
		161.8		81.0		79		2
40	461.6		680.2		435		2	
		161.5		80.7		80		2
50	300.1		599.5		355		0	
		161.2		80.6		82		1
54 0	1,4032 138.9		4,3855 518.9		4,06 273		6,0887 9	
		161.0		80.4		84		2

$(3) + 8{,}5958\,917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6\,RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\,8 - 10$

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1"		(2) log N sin 1"	
		18548,431		120.9		40.3
54° 0'	59 85297,541	18548,947	1,4901 619.8	120.7	1,4911 690.0	40.3
10	60 03846,488	18549,462	740.5	120.5	730.3	40.1
20	22395,950	18549,976	861.0	120.3	770.4	40.1
30	40945,926	18550,490	981.3	120.0	810.5	40.0
40	59496,416	18551,002	1,4902 101.3	119.7	850.5	39.9
50	78047,418	18551,513	221.0	119.5	890.4	39.8
55 0	60 96598,931	18552,023	1,4902 340.5	119.3	1,4911 930.2	39.8
10	61 15150,954	18552,532	459.8	119.0	970.0	39.7
20	33703,486	18553,039	578.8	118.7	1,4912 009.7	39.5
30	52256,525	18553,546	697.5	118.5	049.2	39.5
40	70810,071	18554,052	816.0	118.2	088.7	39.4
50	89364,123	18554,557	934.2	118.0	128.1	39.4
56 0	62 07918,680	18555,060	1,4903 052.2	117.6	1,4912 167.5	39.2
10	26473,740	18555,561	169.8	117.4	206.7	39.1
20	45029,301	18556,062	287.2	117.1	245.8	39.0
30	63585,363	18556,562	404.3	116.9	284.8	39.0
40	82141,925	18557,061	521.2	116.5	323.8	38.8
50	63 00698,986	18557,559	637.7	116.2	362.6	38.8
57 0	63 19256,545	18558,055	1,4903 753.9	116.0	1,4912 401.4	38.6
10	37814,600	18558,549	869.9	115.6	440.0	38.6
20	56373,149	18559,043	985.5	115.3	478.6	38.4
30	74932,192	18559,535	1,4904 100.8	115.0	517.0	38.3
40	93491,727	18560,025	215.8	114.7	555.3	38.3
50	64 12051,752	18560,515	330.5	114.4	593.6	38.1
58 0	64 30612,267	18561,003	1,4904 444.9	114.1	1,4912 631.7	38.0
10	49173,270	18561,489	559.0	113.7	669.7	37.9
20	67734,759	18561,974	672.7	113.4	707.6	37.8
30	86296,733	18562,458	786.1	113.1	745.4	37.7
40	65 04859,191	18562,942	899.2	112.8	783.1	37.6
50	23422,133	18563,425	1,4905 012.0	112.3	820.7	37.5
59 0	65 41985,558	18563,904	1,4905 124.3	112.1	1,4912 858.2	37.3
10	60549,462	18564,382	236.4	111.7	895.5	37.3
20	79113,844	18564,858	348.1	111.3	932.8	37.1
30	97678,702	18565,333	459.4	111.0	969.9	37.0
40	66 16244,035	18565,807	570.4	110.7	1,4913 006.9	36.9
50	34809,842	18566,280	681.1	110.2	043.8	36.7
60 0	66 53376,122	18566,750	1,4905 791.3	109.9	1,4913 080.5	36.6

$\log R = (1)^a = (1) + 5{,}3144\ 251.3$; $\log N = 5{,}3144\ 251.3 + (2) = (2)^a$

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2RN \sin 1''}$ 1,......—10		(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2R}$ 4,......—10		(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4R}$ 4,......—20		(6) $\log \frac{1}{2RN}$ 6,......—20	
		161.2		80.6		82		2
54° 0′	1,4032 138.9		4,3855 518.9		4,06 273		6,0887 9	
		161.0		80.4		84		2
10	1,4031 977.9		438.5		189		7	
		160.6		80.4		85		1
20	817.3		358.1		104		6	
		160.4		80.2		87		2
30	656.9		277.9		017		4	
		160.0		80.0		89		2
40	496.9		197.9		4,05 928		2	
		159.6		79.8		90		1
50	337.3		118.1		838		1	
		159.3		79.7		92		2
55 0	1,4031 178.0		4,3855 038.4		4,05 746		6,0886 9	
		159.1		79.5		93		1
10	018.9		4,3854 958.9		653		8	
		158.7		79.3		96		2
20	1,4030 860.2		879.6		557		6	
		158.2		79.2		97		1
30	702.0		800.4		460		5	
		158.0		79.0		98		2
40	544.0		721.4		362		3	
		157.6		78.8		101		2
50	386.4		642.6		261		1	
		157.4		78.6		102		1
56 0	1,4030 229.0		4,3854 564.0		4,05 159		6,0886 0	
		156.8		78.4		103		2
10	072.2		485.6		056		6,0885 8	
		156.5		78.3		106		1
20	1,4029 915.7		407.3		4,04 950		7	
		156.1		78.1		107		2
30	759.6		329.2		843		5	
		155.9		77.9		109		1
40	603.7		251.3		734		4	
		155.3		77.7		110		2
50	448.4		173.6		624		2	
		155.0		77.4		112		2
57 0	1,4029 293.4		4,3854 096.2		4,04 512		6,0885 0	
		154.6		77.4		115		1
10	138.8		018.8		397		6,0884 9	
		154.2		77.0		116		2
20	1,4028 984.6		4,3853 941.8		281		7	
		153.7		76.9		118		1
30	830.9		864.9		163		6	
		153.3		76.7		119		2
40	677.6		788.2		044		4	
		153.0		76.4		121		1
50	524.6		711.8		4,03 923		3	
		152.5		76.3		123		2
58 0	1,4028 372.1		4,3853 635.5		4,03 800		6,0884 1	
		152.1		76.1		125		1
10	220.0		559.4		675		0	
		151.6		75.8		127		2
20	068.4		483.6		548		6,0883 8	
		151.2		75.6		129		1
30	1,4027 917.2		408.0		419		7	
		150.8		75.4		130		2
40	766.4		332.6		289		5	
		150.4		75.2		132		1
50	616.0		257.4		157		4	
		149.8		74.8		135		2
59 0	1,4027 466.2		4,3853 182.6		4,03 022		6,0883 2	
		149.4		74.8		136		1
10	316.8		107.8		4,02 886		1	
		149.0		74.4		138		2
20	167.8		033.4		748		6,0882 9	
		148.4		74.2		139		1
30	019.4		4,3852 959.2		609		8	
		148.0		74.0		142		2
40	1,4026 871.4		885.2		467		6	
		147.6		73.8		144		1
50	723.8		811.4		323		5	
		146.9		73.5		145		2
60 0	1,4026 576.9		4,3852 737.9		4,02 178		6,0882 3	
		146.5		73.3		148		1

$(3) + 8{,}5958\,917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\,8 - 10$

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1″		(2) log N sin 1″	
		18566,280		110.2		36.7
60° 0′	66 53376,122	18566,750	1,4905 791.3	109.9	1,4913 080.5	36.6
10	71942,872	18567,219	901.2	109.6	117.1	36.6
20	90510,091	18567,687	1,4906 010.8	109.1	153.7	36.3
30	67 09077,778	18568,153	119.9	108.8	190.0	36.3
40	27645,931	18568,617	228.7	108.4	226.3	36.1
50	46214,548	18569,079	337.1	108.0	262.4	36.0
61 0	67 64783,627	18569,539	1,4906 445.1	107.6	1,4913 298.4	35.9
10	83353,166	18569,998	552.7	107.2	334.3	35.7
20	68 01923,164	18570,456	659.9	106.8	370.0	35.6
30	20493,620	18570,913	766.7	106.5	405.6	35.5
40	39064,533	18571,367	873.2	106.0	441.1	35.4
50	57635,900	18571,819	979.2	105.6	476.5	35.2
62 0	68 76207,719	18572,269	1,4907 084.8	105.2	1,4913 511.7	35.0
10	94779,988	18572,719	190.0	104.8	546.7	35.0
20	69 13352,707	18573,167	294.8	104.3	581.7	34.7
30	31925,874	18573,612	399.1	104.0	616.4	34.7
40	50499,486	18574,055	503.1	103.5	651.1	34.5
50	69073,541	18574,497	606.6	103.1	685.6	34.4
63 0	69 87648,038	18574,937	1,4907 709.7	102.6	1,4913 720.0	34.2
10	70 06222,975	18575,375	812.3	102.2	754.2	34.0
20	24798,350	18575,811	914.5	101.8	788.2	34.0
30	43374,161	18576,246	1,4908 016.3	101.3	822.2	33.7
40	61950,407	18576,678	117.6	100.9	855.9	33.7
50	80527,085	18577,109	218.5	100.4	889.6	33.4
64 0	70 99104,194	18577,538	1,4908 318.9	100.0	1,4913 923.0	33.4
10	71 17681,732	18577,964	418.9	99.5	956.4	33.1
20	36259,696	18578,389	518.4	99.1	989.5	33.1
30	54838,085	18578,812	617.5	98.6	1.4914 022.6	32.8
40	73416,897	18579,232	716.1	98.1	055.4	32.7
50	91996,129	18579,651	814.2	97.7	088.1	32.6
65 0	72 10575,780	18580,068	1,4908 911.9	97.2	1,4914 120.7	32.4
10	29155,848	18580,483	1,4909 009.1	96.7	153.1	32.2
20	47736,331	18580,896	105.8	96.2	185.3	32.1
30	66317,227	18581,307	202.0	95.7	217.4	31.9
40	84898,534	18581,716	297.7	95.3	249.3	31.8
50	73 03480,250	18582,122	393.0	94.8	281.1	31.6
66 0	73 22062,372	18582,525	1,4909 487.8	94.2	1,4914 312.7	31.4

log R = (1)^a = (1) + 5,3144 251.3; log$N$ = 5,3144 251.3 + (2) = (2)^a

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2RN \sin 1''}$ 1,......—10		(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2R}$ 4,......—10		(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4R}$ 4,.....—10		(6) $\log \frac{1}{2RN}$ 6,.....—20	
60° 0′	1,4026 576.9	146.9	4,3852 737.9	73.5	4,02 178	145	6,0882 3	2
10	430.4	146.5	664.6	73.3	030	148	2	1
20	284.2	146.2	591.6	73.0	4,01 880	150	0	2
30	138.8	145.4	518.8	72.8	728	152	6,0881 9	1
40	1,4025 993.7	145.1	446.3	72.5	575	153	7	2
50	849.2	144.5	374.0	72.3	420	155	6	1
		144.0		72.0		157		1
61 0	1,4025 705.2	143.5	4,3852 302.0	71.7	4,01 263	160	6,0881 5	2
10	561.7	142.9	230.3	71.5	103	162	3	1
20	418.8	142.4	158.8	71.2	4,00 941	164	2	2
30	276.4	142.0	087.6	71.0	777	166	0	1
40	134.4	141.4	016.6	70.6	611	168	6,0880 9	2
50	1,4024 993.0		4,3851 946.0		443		7	
		140.8		70.4		170		1
62 0	1,4024 852.2	140.2	4,3851 875.6	70.2	4,00 273	172	6,0880 6	1
10	712.0	139.8	805.4	69.8	101	174	5	2
20	572.2	139.0	735.6	69.6	3,99 927	177	3	1
30	433.2	138.7	666.0	69.3	750	179	2	2
40	294.5	138.0	596.7	69.0	571	181	0	1
50	156.5		527.7		390		6,0879 9	
		137.5		68.7		183		1
63 0	1,4024 019.0	136.8	4,3851 459.0	68.4	3,99 207	185	6,0879 8	2
10	1,4023 882.2	136.2	390.6	68.2	022	188	6	1
20	746.0	135.8	322.4	67.8	3,98 834	190	5	1
30	610.2	135.0	254.6	67.6	644	192	4	2
40	475.2	134.6	187.0	67.2	452	194	2	1
50	340.6		119.8		258		1	
		133.8		67.0		197		1
64 0	1,4023 206.8	133.4	4,3851 052.8	66.6	3,98 061	199	6,0879 0	2
10	073.4	132.6	4,3850 986.2	66.4	3,97 862	202	6,0878 8	1
20	1,4022 940.8	132.2	919.8	66.0	660	204	7	1
30	808.6	131.4	853.8	65.8	456	207	6	2
40	677.2	130.8	788.0	65.4	249	209	4	1
50	546.4		722.6		040		3	
		130.3		65.1		211		1
65 0	1,4022 416.1	129.6	4,3850 657.5	64.8	3,96 829	214	6,0878 2	2
10	286.5	128.9	592.7	64.5	615	216	0	1
20	157.6	128.3	528.2	64.1	399	219	6,0877 9	1
30	029.3	127.6	464.1	63.8	180	222	8	1
40	1,4021 901.7	127.1	400.3	63.5	3,95 958	224	7	2
50	774.6		336.8		734		5	
		126.4		63.2		227		1
66 0	1,4021 648.2	125.6	4,3850 273.6	62.8	3,95 507	229	6,0877 4	1

(3) + 8,5958 917.9 = $(3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6RN} = (6)^a = (6)$ + 9,5228 8−10

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m	Diff.	(1) log R sin 1"	Diff.	(2) log N sin 1"	Diff.
66° 0'	73 22062,372	18582,122	1,4909 487.8	94.8	1,4914 312.7	31.6
10	40644,897	18582,525	582.0	94.2	344.1	31.4
20	59227,824	18582,927	675.8	93.8	375.3	31.2
30	77811,152	18583,328	769.1	93.3	406.4	31.1
40	96394,879	18583,727	861.8	92.7	437.3	30.9
50	74 14979,002	18584,123	954.1	92.3	468.1	30.8
67 0	74 33563,517	18584,515	1,4910 045.9	91.8	1,4914 498.7	30.6
10	52148,423	18584,906	137.1	91.2	529.1	30.4
20	70733,719	18585,296	227.8	90.7	559.3	30.2
30	89319,403	18585,684	318.0	90.2	589.4	30.1
40	75 07905,472	18586,069	407.7	89.7	619.3	29.9
50	26491,925	18586,453	496.9	89.2	649.0	29.7
68 0	75 45078,758	18586,833	1,4910 585.5	88.6	1,4914 678.6	29.6
10	63665,968	18587,210	673.6	88.1	707.9	29.3
20	82253,554	18587,586	761.2	87.6	737.1	29.2
30	76 00841,513	18587,959	848.2	87.0	766.1	29.0
40	19429,844	18588,331	934.7	86.5	795.0	28.9
50	38018,544	18588,700	1,4911 020.6	85.9	823.6	28.6
69 0	76 56607,611	18589,067	1,4911 106.0	85.4	1,4914 852.1	28.5
10	75197,042	18589,431	190.9	84.9	880.4	28.3
20	93786,835	18589,793	275.2	84.3	908.5	28.1
30	77 12376,987	18590,152	358.9	83.7	936.4	27.9
40	30967,497	18590,510	442.1	83.2	964.1	27.7
50	49558,363	18590,866	524.7	82.6	991.6	27.5
70 0	77 68149,581	18591,218	1,4911 606.8	82.1	1,4915 019.0	27.4
10	86741,148	18591,567	688.3	81.5	046.2	27.2
20	78 05333,063	18591,915	769.2	80.9	073.1	26.9
30	23925,323	18592,260	849.6	80.4	099.9	26.8
40	42517,926	18592,603	929.3	79.7	126.5	26.6
50	61110,869	18592,943	1,4912 008.6	79.3	152.9	26.4
71 0	78 79704,151	18593,282	1,4912 087.2	78.6	1,4915 179.1	26.2

log R = (1)'' = (1) + 5,314[illegible] … N = 5,3144 251.3 + (2) = (2)''

(7) = log [illegible]

φ	(7)	φ	[illegible]
36°	6,556 [illegible]	42	[illegible]
38	[illegible]	[illegible]	[illegible]
40	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ 1,......—10	Diff.	(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}$ 4,......—10	Diff.	(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}$ 3,......—10	Diff.	(6) $\log \frac{1}{2\,RN}$ 6,.....—20	Diff.
		126.4		63.2		227		1
66° 0′	1,4021 648.2	125.6	4,3850 273.6	62.8	3,95 507	229	6,0877 4	1
10	522.6	125.0	210.8	62.6	278	232	3	2
20	397.6	124.4	148.2	62.2	046	235	1	1
30	273.2	123.6	086.0	61.8	3,94 811	238	0	1
40	149.6	123.1	024.2	61.5	573	240	6,0876 9	1
50	026.5	122.4	4,3849 962.7	61.2	333	243	8	1
67 0	1,4020 904.1	121.6	4,3849 901.5	60.8	3,94 090	246	6,0876 7	2
10	782.5	120.9	840.7	60.5	3,93 844	249	5	1
20	661.6	120.3	780.2	60.1	595	252	4	1
30	541.3	119.6	720.1	59.8	343	255	3	1
40	421.7	118.9	660.3	59.5	088	258	2	1
50	302.8	118.2	600.8	59.0	3,92 830	260	1	2
68 0	1,4020 184.6	117.4	4,3849 541.8	58.8	3,92 570	264	6,0875 9	1
10	067.2	116.8	483.0	58.4	306	267	8	1
20	1,4019 950.4	116.0	424.6	58.0	039	270	7	1
30	834.4	115.4	366.6	57.6	3,91 769	273	6	1
40	719.0	114.5	309.0	57.3	496	276	5	1
50	604.5	113.9	251.7	56.9	220	280	4	2
69 0	1.4019 490.6	113.2	4,3849 194.8	56.6	3,90 940	283	6,0875 2	1
10	377.4	112.4	138.2	56.2	657	286	1	1
20	265.0	111.6	082.0	55.8	371	289	0	1
30	153.4	110.9	026.2	55.5	082	293	6,0874 9	1
40	042.5	110.1	4,3848 970.7	55.1	3,89 789	297	8	1
50	1,4018 932.4	109.5	915.6	54.7	492	300	7	1
70 0	1,4018 822.9	108.7	4,3848 860.9	54.3	3,89 192	303	6,0874 6	1
10	714.2	107.8	806.6	54.0	3,88 889	307	5	1
20	606.4	107.2	752.6	53.6	582	311	4	2
30	499.2	106.3	699.0	53.1	271	314	2	1
40	392.9	105.7	645.9	52.9	3,87 957	318	1	1
50	287.2	104.8	593.0	52.4	639	322	0	1
71 0	1,4018 182.4		4,3848 540.6		3,87 317		6,0873 9	

$(3) + 8{,}5958\;917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6\,RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\;8-10$

$(7) = \log \frac{2}{3\,R \sin 1'} = 6{,}55\ldots-10$

φ	(7)	Diff.	φ	(7)	Diff.	φ	(7)	Diff.
		15			13			12
54°	6,555 59	14	60°	6,555 18	13	66°	6,554 81	11
56	45	14	62	05	12	68	70	10
58	31	13	64	6,554 93	12	70	60	

$\log \frac{3}{4} = 9{,}8750\;6-10$

Die Walbeckschen Elemente des

Geogr. Breite. φ	x^m für Nullpunkt Cassel.		x^m für Nullpunkt Inselsberg.	
50° 0′	—146642,394			
		18535,057		
10	—128107,337			
		18535,584		
20	—109571,753			
		18536,110		18536,110
30	— 91035,643		— 39189,878	
		18536,636		18536,636
40	— 72499,007		— 20653,242	
		18537,161		18537,161
50	— 53961,846		— 2116,081	
		18537,685		18537,685
51 0	— 35424,161		+ 16421,604	
		18538,209		18538,209
10	— 16885,952			
		18538,732		
20	+ 1652,780			
		18539,255	x^m für Nullpunkt Hermannsdenkmal.	
30	+ 20192,035			
		18539,777		
40	+ 38731,812			
		18540,298		18540,298
50			— 8873,664	
				18540,818
52 0			+ 9667,154	
				18541,338
10			+ 28208,492	
				18541,857
20			+ 46750,349	
				18542,376
30			+ 65292,725	

Cassel. $\varphi_0 = 51°\ 19'\ 6,''509$; $\lambda_0 = 27°\ 9'\ 56,''956$.

Inselsberg. $\varphi_0 = 50°\ 51'\ 8,''4909$; $\lambda_0 = 28°\ 7'\ 54,''1055$.

Hermannsdenkmal. $\varphi_0 = 51°\ 54'\ 47,''163$; $\lambda_0 = 26°\ 30'\ 15,''032$.

Erdsphäroids als Grundlage.

Geogr. Breite. φ	(1) $\log R \sin 1''$	Δ	(2) $\log N \sin 1''$	Δ	(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4R}$ 4,0....—10	Δ	(3) $\log \frac{1}{2RN \sin 1''}$ 1,403..—10	Δ
50° 0′	1,4898 365.1		1,4910 260.6		4,07 806		1,403 68	
		123.4		41.1		47		1
10	488.5		301.7		759		67	
		123.4		41.1		47		2
20	611.9		342.8		712		65	
		123.2		41.1		49		2
30	735.1		383.9		663		63	
		123.1		41.0		51		1
40	858.2		424.9		612		62	
		122.9		41.0		52		2
50	981.1		465.9		560		60	
		122.8		41.0		54		2
51 0	1,4899 103.9		1,4910 506.9		4,07 506		1,403 58	
		122.7		40.8		55		1
10	226.6		547.7		451		57	
		122.5		40.9		57		2
20	349.1		588.6		394		55	
		122.3		40.7		59		2
30	471.4		629.3		335		53	
		122.2		40.8		60		1
40	593.6		670.1		275		52	
		122.0		40.6		61		2
50	715.6		710.7		214		50	
		121.8		40.7		63		1
52 0	1,4899 837.4		1,4910 751.4		4,07 151		1,403 49	
		121.7		40.5		65		2
10	959.1		791.9		086		47	
		121.5		40.5		66		2
20	1,4900 080.6		832.4		020		45	
		121.3		40.4		67		1
30	201.9		872.8		4,06 953		44	

φ	(7) $= \log \frac{2}{3 R \sin 1'}$	Δ
50°	6,555 92	
		7
51	85	
		8
52	77	

$\log \frac{3}{4} = 9,875\ 06 - 10$

Für die Systeme Cassel und Inselsberg ist zu $\log x$ und $\log y$, bezw. $\log s$ in 7ter Decimale —125, für Hermannsdenkmal aber —179 zu addieren.

II. Besselsche Tafeln zur sphäroidischen Übertragung.

Argument.	log α		log β		log γ		log α'		log β'	
8,620	5,314 2365.6	8.7	1,95199	200	7,686	4	9,69 8844	1	1,475	2
1	356.9	8.7	5399	200	90	4	43	0	77	2
2	348.2	8.8	5599	199	94	4	43	1	79	2
3	339.4	8.8	5798	200	98	4	42	0	81	2
4	330.6	8.9	5998	200	7,702	4	42	1	83	2
5	321.7	9.0	6198	200	06	4	41	1	85	2
6	312.7	8.9	6398	200	10	4	40	0	87	2
7	303.8	9.0	6598	199	14	4	40	1	89	2
8	294.8	9.0	6797	200	18	4	39	0	91	2
9	285.8	9.1	6997	200	22	4	39	1	93	2
8,630	5,314 2276.7	9.1	1,97197	200	7,726	4	9,69 8838	1	1,495	2
1	267.6	9.2	7397	200	30	4	37	0	97	2
2	258.4	9.2	7597	199	34	4	37	1	99	2
3	249.2	9.2	7796	200	38	4	36	0	1,501	2
4	240.0	9.3	7996	200	42	4	36	1	03	2
5	230.7	9.3	8196	200	46	4	35	1	05	2
6	221.4	9.4	8396	200	50	4	34	0	07	2
7	212.0	9.4	8596	199	54	4	34	1	09	2
8	202.6	9.4	8795	200	58	4	33	0	11	2
9	193.2	9.5	8995	200	62	4	33	1	13	2
8,640	5,314 2183.7	9.5	1,99195	200	7,766	4	9,69 8832	1	1,515	2
1	174.2	9.5	9395	200	70	4	31	0	17	2
2	164.7	9.7	9595	199	74	4	31	1	19	2
3	155.0	9.7	9794	200	78	4	30	0	21	2
4	145.3	9.7	9994	200	82	4	30	1	23	2
5	135.6	9.7	2,00194	200	86	4	29	1	25	2
6	125.9	9.8	0394	200	90	4	28	0	27	2
7	116.1	9.9	0594	199	94	4	28	1	29	2
8	106.2	9.9	0793	200	98	4	27	0	31	2
9	096.3	9.9	0993	200	7,802	4	27	1	33	2
8,650	5,314 2086.4	10.0	2,01193	200	7,806	4	9,69 8826	1	1,535	2
1	076.4	10.0	1393	200	10	4	25	0	37	2
2	066.4	10.1	1593	199	14	4	25	1	39	2
3	056.3	10.1	1792	200	18	4	24	1	41	2
4	046.2	10.2	1992	200	22	4	23	0	43	2
5	036.0	10.2	2192	200	26	4	23	1	45	2
6	025.8	10.3	2392	200	30	4	22	1	47	2
7	015.5	10.3	2592	199	34	4	21	1	49	2
8	005.2	10.4	2791	200	38	4	20	0	51	2
9	5,314 1994.8	10.4	2991	200	42	4	20	1	53	2
8,660	5,314 1984.4	10.5	2,03191	200	7,846	4	9,69 8819	1	1,555	2

II. Besselsche Tafeln zur sphäroidischen Übertragung.

Argument.	log α	log β	log γ	log α'	log β'
	10.4	200	4	1	2
8,660	5,314 1984.4	2,03191	7,846	9,69 8819	1,555
	10.5	200	4	1	2
1	973.9	3391	50	18	57
	10.5	200	4	0	2
2	963.4	3591	54	18	59
	10.5	199	4	1	2
3	952.9	3790	58	17	61
	10.6	200	4	1	2
4	942.3	3990	62	16	63
	10.7	200	4	0	2
5	931.6	4190	66	16	65
	10.7	200	4	1	2
6	920.9	4390	70	15	67
	10.7	200	4	1	2
7	910.2	4590	74	14	69
	10.8	199	4	1	2
8	899.4	4789	78	13	71
	10.9	200	4	0	2
9	888.5	4989	82	13	73
	10.9	200	4	1	2
8,670	5,314 1877.6	2,05189	7,886	9,69 8812	1,575
	10.9	200	4	1	2
1	866.7	5389	90	11	77
	11.0	200	4	1	2
2	855.7	5589	94	10	79
	11.1	199	4	0	2
3	844.6	5788	98	10	81
	11.1	200	4	1	2
4	833.5	5988	7,902	09	83
	11.2	200	4	1	2
5	822.3	6188	06	08	85
	11.2	200	4	1	2
6	811.1	6388	10	07	87
	11.2	200	4	1	2
7	799.9	6588	14	06	89
	11.3	199	4	0	2
8	788.6	6787	18	06	91
	11.4	200	4	1	2
9	777.2	6987	22	05	93
	11.4	200	4	1	2
8,680	5,314 1765.8	2,07187	7,926	9,69 8804	1,595
	11.4	200	4	1	2
1	754.4	7387	30	03	97
	11.5	200	4	0	2
2	742.9	7587	34	03	99
	11.6	199	4	1	2
3	731.3	7786	38	02	1,601
	11.6	200	4	1	2
4	719.7	7986	42	01	03
	11.7	200	4	0	2
5	708.0	8186	46	01	05
	11.7	200	4	1	2
6	696.3	8386	50	00	07
	11.8	200	4	1	2
7	684.5	8586	54	9,69 8799	09
	11.9	199	4	1	2
8	672.6	8785	58	98	11
	11.9	200	4	0	2
9	660.7	8985	62	98	13
	11.9	200	4	1	2
8,690	5,314 1648.8	2,09185	7,966	9,69 8797	1,615
	12.0	200	4	1	2
1	636.8	9385	70	96	17
	12.1	199	4	1	2
2	624.7	9584	74	95	19
	12.1	200	4	1	2
3	612.6	9784	78	94	21
	12.2	200	4	1	2
4	600.4	9984	82	93	23
	12.2	200	4	0	2
5	588.2	2,10184	86	93	25
	12.3	199	4	1	2
6	575.9	0383	90	92	27
	12.3	200	4	1	2
7	563.6	0583	94	91	29
	12.4	200	4	1	2
8	551.2	0783	98	90	31
	12.5	199	4	1	2
9	538.7	0982	8,002	89	33
	12.5	200	4	1	2
8,700	5,314 1526.2	2,11182	8,006	9,69 8788	1,635
	12.6	200	4	1	2

II. Besselsche Tafeln zur sphäroidischen Übertragung.

Argument.	log α		log β		log γ		log α'		log β'	
		12.5		200		4		1		2
8,700	5,314 1526.2	12.6	2,11182	200	8,006	4	9,69 8788	1	1,635	2
1	513.6	12.6	1382	200	10	4	87	1	37	2
2	501.0	12.7	1582	199	14	4	86	0	39	2
3	488.3	12.7	1781	200	18	4	86	1	41	2
4	475.6	12.8	1981	200	22	4	85	1	43	2
5	462.8	12.9	2181	200	26	4	84	1	45	1
6	449.9	12.9	2381	200	30	4	83	1	46	2
7	437.0	13.0	2581	199	34	4	82	0	48	2
8	424.0	13.0	2780	200	38	4	82	1	50	2
9	411.0	13.1	2980	200	42	4	81	1	52	2
8,710	5,314 1397.9	13.2	2,13180	200	8,046	4	9,69 8780	1	1,654	2
1	384.7	13.2	3380	199	50	4	79	1	56	2
2	371.5	13.3	3579	200	54	4	78	1	58	2
3	358.2	13.3	3779	200	58	4	77	1	60	2
4	344.9	13.4	3979	200	62	4	76	0	62	2
5	331.5	13.5	4179	199	66	4	76	1	64	2
6	318.0	13.5	4378	200	70	4	75	1	66	2
7	304.5	13.6	4578	200	74	4	74	1	68	2
8	290.9	13.7	4778	199	78	4	73	1	70	2
9	277.2	13.7	4977	200	82	4	72	1	72	2
8,720	5,314 1263.5	13.8	2,15177	200	8,086	4	9,69 8771	1	1,674	2
1	249.7	13.8	5377	199	90	4	70	1	76	2
2	235.9	13.9	5576	200	94	4	69	1	78	2
3	222.0	14.0	5776	200	98	4	68	1	80	2
4	208.0	14.0	5976	200	8,102	4	67	1	82	2
5	194.0	14.1	6176	199	06	4	66	1	84	2
6	179.9	14.1	6375	200	10	4	65	1	86	2
7	165.8	14.2	6575	200	14	4	64	1	88	2
8	151.6	14.3	6775	199	18	4	63	1	90	2
9	137.3	14.4	6974	200	22	4	62	1	92	2
8,730	5,314 1122.9	14.4	2,17174	200	8,126	4	9,69 8761	1	1,694	2
1	108.5	14.5	7374	199	30	4	60	1	96	2
2	094.0	14.6	7573	200	34	4	59	1	98	2
3	079.4	14.6	7773	200	38	4	58	1	1,700	2
4	064.8	14.7	7973	200	42	4	57	0	02	2
5	050.1	14.7	8173	199	46	4	57	1	04	2
6	035.4	14.9	8372	200	50	4	56	1	06	2
7	020.5	14.9	8572	200	54	4	55	1	08	2
8	005.6	15.0	8772	199	58	4	54	1	10	2
9	5,314 0990.6	15.0	8971	200	62	4	53	1	12	2
8,740	5,314 0975.6	15.1	2,19171	200	8,166	4	9,69 8752	1	1,714	2

II. Besselsche Tafeln zur sphäroidischen Übertragung.

Argument.	log α		log β		log γ		log α'		log β'	
		15.0		200		4		1		2
8,740	5,314 0975.6		2,19171		8,166		9,69 8752		1,714	
		15.1		200		4		1		2
1	960.5		9371		70		51		16	
		15.2		199		4		1		2
2	945.3		9570		74		50		18	
		15.2		200		4		1		2
3	930.1		9770		78		49		20	
		15.3		200		4		1		2
4	914.8		9970		82		48		22	
		15.4		200		4		1		2
5	899.4		2,20170		86		47		24	
		15.5		199		4		2		2
6	883.9		0369		90		45		26	
		15.6		200		4		1		2
7	868.3		0569		94		44		28	
		15.6		200		4		1		2
8	852.7		0769		98		43		30	
		15.7		199		4		1		2
9	837.0		0968		8,202		42		32	
		15.7		200		4		1		2
8,750	5,314 0821.3		2,21168		8,206		9,69 8741		1,734	
		15.8		200		4		1		2
1	805.5		1368		10		40		36	
		15.9		199		4		1		2
2	789.6		1567		14		39		38	
		16.0		200		4		1		2
3	773.6		1767		18		38		40	
		16.0		200		4		1		2
4	757.6		1967		22		37		42	
		16.1		200		4		1		2
5	741.5		2167		26		36		44	
		16.2		199		4		1		2
6	725.3		2366		30		35		46	
		16.3		200		4		1		2
7	709.0		2566		34		34		48	
		16.3		200		4		1		2
8	692.7		2766		38		33		50	
		16.4		199		4		1		2
9	676.3		2965		42		32		52	
		16.5		200		4		1		2
8,760	5,314 0659.8		2,23165		8,246		9,69 8731		1,754	
		16.5		200		4		1		2
1	643.3		3365		50		30		56	
		16.7		199		4		1		2
2	626.6		3564		54		29		58	
		16.7		200		4		2		2
3	609.9		3764		58		27		60	
		16.8		199		4		1		2
4	593.1		3963		62		26		62	
		16.8		200		4		1		2
5	576.3		4163		66		25		64	
		16.9		200		4		1		2
6	559.4		4363		70		24		66	
		17.1		199		4		1		2
7	542.3		4562		74		23		68	
		17.1		200		4		2		2
8	525.2		4762		78		21		70	
		17.2		199		4		1		2
9	508.0		4961		82		20		72	
		17.2		200		4		1		2
8,770	5,314 0490.8		2,25161		8,286		9,69 8719		1,774	
		17.3		200		4		1		2
1	473.5		5361		90		18		76	
		17.4		199		4		1		2
2	456.1		5560		94		17		78	
		17.5		200		4		1		2
3	438.6		5760		98		16		80	
		17.6		200		4		1		2
4	421.0		5960		8,302		15		82	
		17.7		200		4		1		2
5	403.3		6160		06		14		84	
		17.7		199		4		2		2
6	385.6		6359		10		12		86	
		17.8		200		4		1		2
7	367.8		6559		14		11		88	
		17.9		200		4		1		2
8	349.9		6759		18		10		90	
		18.0		199		4		1		2
9	331.9		6958		22		09		92	
		18.1		200		4		1		2
8,780	5,314 0313.8		2,27158		8,326		9,69 8708		1,794	
		18.2		200		4		1		2

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1"		(2) log N sin 1"	
		18566,280		110.2		36.7
60° 0′	66 53376,122		1,4905 791.3		1,4913 080.5	
		18566,750		109.9		36.6
10	71942,872		901.2		117.1	
		18567,219		109.6		36.6
20	90510,091		1,4906 010.8		153.7	
		18567,687		109.1		36.3
30	67 09077,778		119.9		190.0	
		18568,153		108.8		36.3
40	27645,931		228.7		226.3	
		18568,617		108.4		36.1
50	46214,548		337.1		262.4	
		18569,079		108.0		36.0
61 0	67 64783,627		1,4906 445.1		1,4913 298.4	
		18569,539		107.6		35.9
10	83353,166		552.7		334.3	
		18569,998		107.2		35.7
20	68 01923,164		659.9		370.0	
		18570,456		106.8		35.6
30	20493,620		766.7		405.6	
		18570,913		106.5		35.5
40	39064,533		873.2		441.1	
		18571,367		106.0		35.4
50	57635,900		979.2		476.5	
		18571,819		105.6		35.2
62 0	68 76207,719		1,4907 084.8		1,4913 511.7	
		18572,269		105.2		35.0
10	94779,988		190.0		546.7	
		18572,719		104.8		35.0
20	69 13352,707		294.8		581.7	
		18573,167		104.3		34.7
30	31925,874		399.1		616.4	
		18573,612		104.0		34.7
40	50499,486		503.1		651.1	
		18574,055		103.5		34.5
50	69073,541		606.6		685.6	
		18574,497		103.1		34.4
63 0	69 87648,038		1,4907 709.7		1,4913 720.0	
		18574,937		102.6		34.2
10	70 06222,975		812.3		754.2	
		18575,375		102.2		34.0
20	24798,350		914.5		788.2	
		18575,811		101.8		34.0
30	43374,161		1,4908 016.3		822.2	
		18576,246		101.3		33.7
40	61950,407		117.6		855.9	
		18576,678		100.9		33.7
50	80527,085		218.5		889.6	
		18577,109		100.4		33.4
64 0	70 99104,194		1,4908 318.9		1,4913 923.0	
		18577,538		100.0		33.4
10	71 17681,732		418.9		956.4	
		18577,964		99.5		33.1
20	36259,696		518.4		989.5	
		18578,389		99.1		33.1
30	54838,085		617.5		1.4914 022.6	
		18578,812		98.6		32.8
40	73416,897		716.1		055.4	
		18579,232		98.1		32.7
50	91996,129		814.2		088.1	
		18579,651		97.7		32.6
65 0	72 10575,780		1,4908 911.9		1,4914 120.7	
		18580,068		97.2		32.4
10	29155,848		1,4909 009.1		153.1	
		18580,483		96.7		32.2
20	47736,331		105.8		185.3	
		18580,896		96.2		32.1
30	66317,227		202.0		217.4	
		18581,307		95.7		31.9
40	84898,534		297.7		249.3	
		18581,716		95.3		31.8
50	73 03480,250		393.0		281.1	
		18582,122		94.8		31.6
66 0	73 22062,372		1,4909 487.8		1,4914 312.7	
		18582,525		94.2		31.4

log $R = (1)^a = (1) + 5{,}3144\ 251.3$; log$N = 5{,}3144\ 251.3 + (2) = (2)^a$

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ 1,.......—10	Diff.	(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}$ 4,.......—10	Diff.	(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}$ 4,......—10	Diff.	(6) $\log \frac{1}{2\,RN}$ 6,......—20	Diff.
60° 0′	1,4026 576.9	146.9	4,3852 737.9	73.5	4,02 178	145	6,0882 3	2
10	430.4	146.5	664.6	73.3	030	148	2	1
20	284.2	146.2	591.6	73.0	4,01 880	150	0	2
30	138.8	145.4	518.8	72.8	728	152	6,0881 9	1
40	1,4025 993.7	145.1	446.3	72.5	575	153	7	2
50	849.2	144.5	374.0	72.3	420	155	6	1
61 0	1,4025 705.2	144.0	4,3852 302.0	72.0	4,01 263	157	6,0881 5	1
10	561.7	143.5	230.3	71.7	103	160	3	2
20	418.8	142.9	158.8	71.5	4,00 941	162	2	1
30	276.4	142.4	087.6	71.2	777	164	0	2
40	134.4	142.0	016.6	71.0	611	166	6,0880 9	1
50	1,4024 993.0	141.4	4,3851 946.0	70.6	443	168	7	2
62 0	1,4024 852.2	140.8	4,3851 875.6	70.4	4,00 273	170	6,0880 6	1
10	712.0	140.2	805.4	70.2	101	172	5	1
20	572.2	139.8	735.6	69.8	3,99 927	174	3	2
30	433.2	139.0	666.0	69.6	750	177	2	1
40	294.5	138.7	596.7	69.3	571	179	0	2
50	156.5	138.0	527.7	69.0	390	181	6,0879 9	1
63 0	1,4024 019.0	137.5	4,3851 459.0	68.7	3,99 207	183	6,0879 8	1
10	1,4023 882.2	136.8	390.6	68.4	022	185	6	2
20	746.0	136.2	322.4	68.2	3,98 834	188	5	1
30	610.2	135.8	254.6	67.8	644	190	4	1
40	475.2	135.0	187.0	67.6	452	192	2	2
50	340.6	134.6	119.8	67.2	258	194	1	1
64 0	1,4023 206.8	133.8	4,3851 052.8	67.0	3,98 061	197	6,0879 0	1
10	073.4	133.4	4,3850 986.2	66.6	3,97 862	199	6,0878 8	2
20	1,4022 940.8	132.6	919.8	66.4	660	202	7	1
30	808.6	132.2	853.8	66.0	456	204	6	1
40	677.2	131.4	788.0	65.8	249	207	4	2
50	546.4	130.8	722.6	65.4	040	209	3	1
65 0	1,4022 416.1	130.3	4,3850 657.5	65.1	3,96 829	211	6,0878 2	1
10	286.5	129.6	592.7	64.8	615	214	0	2
20	157.6	128.9	528.2	64.5	399	216	6,0877 9	1
30	029.3	128.3	464.1	64.1	180	219	8	1
40	1,4021 901.7	127.6	400.3	63.8	3,95 958	222	7	1
50	774.6	127.1	336.8	63.5	734	224	5	2
66 0	1,4021 648.2	126.4	4,3850 273.6	63.2	3,95 507	227	6,0877 4	1
		125.6		62.8		229		1

(3) + 8,5958 917.9 = $(3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6\,RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\,8 - 10$

Geogr. Breite. φ	Meridian vom Äquator bis φ. q^m		(1) log R sin 1″		(2) log N sin 1″	
		18582,122		94.8		31.6
66° 0′	73 22062,372		1,4909 487.8		1,4914 312.7	
		18582,525		94.2		31.4
10	40644,897		582.0		344.1	
		18582,927		93.8		31.2
20	59227,824		675.8		375.3	
		18583,328		93.3		31.1
30	77811,152		769.1		406.4	
		18583,727		92.7		30.9
40	96394,879		861.8		437.3	
		18584,123		92.3		30.8
50	74 14979,002		954.1		468.1	
		18584,515		91.8		30.6
67 0	74 33563,517		1,4910 045.9		1,4914 498.7	
		18584,906		91.2		30.4
10	52148,423		137.1		529.1	
		18585,296		90.7		30.2
20	70733,719		227.8		559.3	
		18585,684		90.2		30.1
30	89319,403		318.0		589.4	
		18586,069		89.7		29.9
40	75 07905,472		407.7		619.3	
		18586,453		89.2		29.7
50	26491,925		496.9		649.0	
		18586,833		88.6		29.6
68 0	75 45078,758		1,4910 585.5		1,4914 678.6	
		18587,210		88.1		29.3
10	63665,968		673.6		707.9	
		18587,586		87.6		29.2
20	82253,554		761.2		737.1	
		18587,959		87.0		29.0
30	76 00841,513		848.2		766.1	
		18588,331		86.5		28.9
40	19429,844		934.7		795.0	
		18588,700		85.9		28.6
50	38018,544		1,4911 020.6		823.6	
		18589,067		85.4		28.5
69 0	76 56607,611		1,4911 106.0		1,4914 852.1	
		18589,431		84.9		28.3
10	75197,042		190.9		880.4	
		18589,793		84.3		28.1
20	93786,835		275.2		908.5	
		18590,152		83.7		27.9
30	77 12376,987		358.9		936.4	
		18590,510		83.2		27.7
40	30967,497		442.1		964.1	
		18590,866		82.6		27.5
50	49558,363		524.7		991.6	
		18591,218		82.1		27.4
70 0	77 68149,581		1,4911 606.8		1,4915 019.0	
		18591,567		81.5		27.2
10	86741,148		688.3		046.2	
		18591,915		80.9		26.9
20	78 05333,063		769.2		073.1	
		18592,260		80.4		26.8
30	23925,323		849.6		099.9	
		18592,603		79.7		26.6
40	42517,926		929.3		126.5	
		18592,943		79.3		26.4
50	61110,869		1,4912 008.6		152.9	
		18593,282		78.6		26.2
71 0	78 79704,151		1,4912 087.2		1,4915 179.1	

log R = $(1)^a$ = (1) + 5,3144 251.3; log$N$ = 5,3144 251.3 + (2) = $(2)^a$

$$(7) = \log \frac{2}{3\,R \sin 1'} = 6{,}55\ldots - 10$$

φ	(7)		φ	(7)		φ	(7)	
					15			15
36°	6,556 94		42°	6,556 50		48°	6,556 04	
		14			15			15
38	80		44	35		50	6,555 89	
		15			16			15
40	65		46	19		52	74	
		15			15			15

log $\frac{3}{4}$ = 9,8750 6—10

Geogr. Breite. φ	(3) $\log \frac{1}{2\,RN \sin 1''}$ 1,……—10		(4) $\log \frac{N \sin 1''}{2\,R}$ 4,……—10		(5) $\log \frac{N \sin 1'' \sin 2\varphi}{4\,R}$ 3,……—10		(6) $\log \frac{1}{2\,RN}$ 6,……—20	
		126.4		63.2		227		1
66° 0′	1,4021 648.2		4,3850 273.6		3,95 507		6,0877 4	
		125.6		62.8		229		1
10	522.6		210.8		278		3	
		125.0		62.6		232		2
20	397.6		148.2		046		1	
		124.4		62.2		235		1
30	273.2		086.0		3,94 811		0	
		123.6		61.8		238		1
40	149.6		024.2		573		6,0876 9	
		123.1		61.5		240		1
50	026.5		4,3849 962.7		333		8	
		122.4		61.2		243		1
67 0	1,4020 904.1		4,3849 901.5		3,94 090		6,0876 7	
		121.6		60.8		246		2
10	782.5		840.7		3,93 844		5	
		120.9		60.5		249		1
20	661.6		780.2		595		4	
		120.3		60.1		252		1
30	541.3		720.1		343		3	
		119.6		59.8		255		1
40	421.7		660.3		088		2	
		118.9		59.5		258		1
50	302.8		600.8		3,92 830		1	
		118.2		59.0		260		2
68 0	1,4020 184.6		4,3849 541.8		3,92 570		6,0875 9	
		117.4		58.8		264		1
10	067.2		483.0		306		8	
		116.8		58.4		267		1
20	1,4019 950.4		424.6		039		7	
		116.0		58.0		270		1
30	834.4		366.6		3,91 769		6	
		115.4		57.6		273		1
40	719.0		309.0		496		5	
		114.5		57.3		276		1
50	604.5		251.7		220		4	
		113.9		56.9		280		2
69 0	1.4019 490.6		4,3849 194.8		3,90 940		6,0875 2	
		113.2		56.6		283		1
10	377.4		138.2		657		1	
		112.4		56.2		286		1
20	265.0		082.0		371		0	
		111.6		55.8		289		1
30	153.4		026.2		082		6,0874 9	
		110.9		55.5		293		1
40	042.5		4,3848 970.7		3,89 789		8	
		110.1		55.1		297		1
50	1,4018 932.4		915.6		492		7	
		109.5		54.7		300		1
70 0	1,4018 822.9		4,3848 860.9		3,89 192		6,0874 6	
		108.7		54.3		303		1
10	714.2		806.6		3,88 889		5	
		107.8		54.0		307		1
20	606.4		752.6		582		4	
		107.2		53.6		311		2
30	499.2		699.0		271		2	
		106.3		53.1		314		1
40	392.9		645.9		3,87 957		1	
		105.7		52.9		318		1
50	287.2		593.0		639		0	
		104.8		52.4		322		1
71 0	1,4018 182.4		4,3848 540.6		3,87 317		6,0873 9	

$(3) + 8{,}5958\ 917.9 = (3)^a = \log \frac{1}{rn}$; $\log \frac{1}{6\,RN} = (6)^a = (6) + 9{,}5228\ 8 - 10$

$(7) = \log \frac{2}{3\,R \sin 1'} = 6{,}55\ldots - 10$

φ	(7)		φ	(7)		φ	(7)	
54°	6,555 59	15	60°	6,555 18	13	66°	6,554 81	12
		14			13			11
56	45		62	05		68	70	
		14			12			10
58	31		64	6,554 93		70	60	
		13			12			

$\log \frac{3}{4} = 9{,}8750\ 6 - 10$

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω	log ω''	log ω'''	(τ)		log ω	log ω''	log ω'''	(τ)	
·,··—10	·,··443	·,··502			·,··—10	·,··443	·,··502		
6,00	1,31	2,80	0.01	0,03	7,50	2,81	4,30	14.5	0.7
6,20	1,51	3,00	0.04	0,05	7,51	2,82	4,31	15.2	0.7
6,40	1,71	3,20	0.09	0,14	7,52	2,83	4,32	15.9	0.7
6,60	1,91	3,40	0.23	0,35	7,53	2,84	4,33	16.6	0.8
6,80	2,11	3,60	0.58	0,87	7,54	2,85	4,34	17.4	0.8
7,00	2,31	3,80	1.45	0,14	7,55	2,86	4,35	18.2	0.9
7,02	2,33	3,82	1.59	0,16	7,56	2,87	4,36	19.1	0.9
7,04	2,35	3,84	1.75	0,15	7,57	2,88	4,37	20.0	0.9
7,06	2,37	3,86	1.90	0,19	7,58	2,89	4,38	20.9	1,0
7,08	2,39	3,88	2.09	0,21	7,59	2,90	4,39	21.9	1,0
7,10	2,41	3,90	2.3	0,1	7,60	2,91	4,40	22.9	1,1
7,11	2,42	3,91	2.4	0,1	7,61	2,92	4,41	24.0	1,2
7,12	2,43	3,92	2.5	0,1	7,62	2,93	4,42	25.2	1,1
7,13	2,44	3,93	2.6	0,2	7,63	2,94	4,43	26.3	1,3
7,14	2,45	3,94	2.8	0,1	7,64	2,95	4,44	27.6	1,3
7,15	2,46	3,95	2.9	0,1	7,65	2,96	4,45	28.9	1,3
7,16	2,47	3,96	3.0	0,2	7,66	2,97	4,46	30.2	1,5
7,17	2,48	3,97	3.2	0,1	7,67	2,98	4,47	31.7	1,5
7,18	2,49	3,98	3.3	0,2	7,68	2,99	4,48	33.2	1,5
7,19	2,50	3,99	3.5	0,1	7,69	3,00	4,49	34.7	1,7
7,20	2,51	4,00	3.6	0,2	7,70	3,01	4,50	36.4	1,7
7,21	2,52	4,01	3.8	0,2	7,71	3,02	4,51	38.1	1,8
7,22	2,53	4,02	4.0	0,2	7,72	3,03	4,52	39.9	1,9
7,23	2,54	4,03	4.2	0,2	7,73	3,04	4,53	41.8	1,9
7,24	2,55	4,04	4.4	0,2	7,74	3,05	4,54	43.7	2,1
7,25	2,56	4,05	4.6	0,2	7,75	3,06	4,55	45.8	2,1
7,26	2,57	4,06	4.8	0,2	7,76	3,07	4,56	47.9	2,3
7,27	2,58	4,07	5.0	0,3	7,77	3,08	4,57	50.2	2,4
7,28	2,59	4,08	5.3	0,2	7,78	3,09	4,58	52.6	2,4
7,29	2,60	4,09	5.5	0,3	7,79	3,10	4,59	55.0	2,6
7,30	2,61	4,10	5.8	0,2	7,80	3,11	4,60	57.6	2,7
7,31	2,62	4,11	6.0	0,3	7,81	3,12	4,61	60.3	2,9
7,32	2,63	4,12	6.3	0,3	7,82	3,13	4,62	63.2	3,0
7,33	2,64	4,13	6.6	0,3	7,83	3,14	4,63	66.2	3,1
7,34	2,65	4,14	6.9	0,4	7,84	3,15	4,64	69.3	3,3
7,35	2,66	4,15	7.3	0,3	7,85	3,16	4,65	72.6	3,4
7,36	2,67	4,16	7.6	0,4	7,86	3,17	4,66	76.0	3,6
7,37	2,68	4,17	8.0	0,3	7,87	3,18	4,67	79.6	3,7
7,38	2,69	4,18	8.3	0,4	7,88	3,19	4,68	83.3	3,9
7,39	2,70	4,19	8.7	0,4	7,89	3,20	4,69	87.2	4,1
7,40	2,71	4,20	9.1	0,5	7,90	3,21	4,70	91.3	4,3
7,41	2,72	4,21	9.6	0,4	7,91	3,22	4,71	95.6	4,6
7,42	2,73	4,22	10.0	0,5	7,92	3,23	4,72	100.2	4,7
7,43	2,74	4,23	10.5	0,5	7,93	3,24	4,73	104.9	4,9
7,44	2,75	4,24	11.0	0,5	7,94	3,25	4,74	109.8	5,2
7,45	2,76	4,25	11.5	0,5	7,95	3,26	4,75	115.0	5,4
7,46	2,77	4,26	12.0	0,6	7,96	3,27	4,76	120.4	5,7
7,47	2,78	4,27	12.6	0,6	7,97	3,28	4,77	126.1	5,9
7,48	2,79	4,28	13.2	0,6	7,98	3,29	4,78	132.0	6,3
7,49	2,80	4,29	13.8	0,7	7,99	3,30	4,79	138.3	6,5
7,50	2,81	4,30	14.5		8,00	3,31	4,80	144.8	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω''' 4,...02	(τ)		log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω''' 4,...02	(τ)	
8,000	3,314	4,805	144.8	0.6	8,050	3,364	4,855	182.3	0.8
8,001	3,315	4,806	145.4	0.7	8,051	3,365	4,856	183.1	0.8
8,002	3,316	4,807	146.1	0.7	8,052	3,366	4,857	183.9	0.9
8,003	3,317	4,808	146.8	0.7	8,053	3,367	4,858	184.8	0.8
8,004	3,318	4,809	147.5		8,054	3,368	4,859	185.6	
				0.6					0.9
8,005	3,319	4,810	148.1	0.7	8,055	3,369	4,860	186.5	0.9
8,006	3,320	4,811	148.8	0.7	8,056	3,370	4,861	187.4	0.8
8,007	3,321	4,812	149.5	0.7	8,057	3,371	4,862	188.2	0.9
8,008	3,322	4,813	150.2	0.7	8,058	3,372	4,863	189.1	0.9
8,009	3,323	4,814	150.9		8,059	3,373	4,864	190.0	
				0.7					0.8
8,010	3,324	4,815	151.6	0.7	8,060	3,374	4,865	190.8	0.9
8,011	3,325	4,816	152.3	0.7	8,061	3,375	4,866	191.7	0.9
8,012	3,326	4,817	153.0	0.7	8,062	3,376	4,867	192.6	0.9
8,013	3,327	4,818	153.7	0.7	8,063	3,377	4,868	193.5	0.9
8,014	3,328	4,819	154.4		8,064	3,378	4,869	194.4	
				0.7					0.9
8,015	3,329	4,820	155.1	0.7	8,065	3,379	4,870	195.3	0.9
8,016	3,330	4,821	155.8	0.8	8,066	3,380	4,871	196.2	0.9
8,017	3,331	4,822	156.6	0.7	8,067	3,381	4,872	197.1	0.9
8,018	3,332	4,823	157.3	0.7	8,068	3,382	4,873	198.0	0.9
8,019	3,333	4,824	158.0		8,069	3,383	4,874	198.9	
				0.7					0.9
8,020	3,334	4,825	158.7	0.8	8,070	3,384	4,875	199.8	1.0
8,021	3,335	4,826	159.5	0.7	8,071	3,385	4,876	200.8	0.9
8,022	3,336	4,827	160.2	0.7	8,072	3,386	4,877	201.7	0.9
8,023	3,337	4,828	160.9	0.8	8,073	3,387	4,878	202.6	1.0
8,024	3,338	4,829	161.7		8,074	3,388	4,879	203.6	
				0.7					0.9
8,025	3,339	4,830	162.4	0.8	8,075	3,389	4,880	204.5	0.9
8,026	3,340	4,831	163.2	0.7	8,076	3,390	4,881	205.4	1.0
8,027	3,341	4,832	163.9	0.8	8,077	3,391	4,882	206.4	0.9
8,028	3,342	4,833	164.7	0.8	8,078	3,392	4,883	207.3	1.0
8,029	3,343	4,834	165.5		8,079	3,393	4,884	208.3	
				0.7					1.0
8,030	3,344	4,835	166.2	0.8	8,080	3,394	4,885	209.3	0.9
8,031	3,345	4,836	167.0	0.8	8,081	3,395	4,886	210.2	1.0
8,032	3,346	4,837	167.8	0.7	8,082	3,396	4,887	211.2	1.0
8,033	3,347	4,838	168.5	0.8	8,083	3,397	4,888	212.2	0.9
8,034	3,348	4,839	169.3		8,084	3,398	4,889	213.1	
				0.8					1.0
8,035	3,349	4,840	170.1	0.8	8,085	3,399	4,890	214.1	1.0
8,036	3,350	4,841	170.9	0.8	8,086	3,400	4,891	215.1	1.0
8,037	3,351	4,842	171.7	0.8	8,087	3,401	4,892	216.1	1.0
8,038	3,352	4,843	172.5	0.8	8,088	3,402	4,893	217.1	1.0
8,039	3,353	4,844	173.3		8,089	3,403	4,894	218.1	
				0.8					1.0
8,040	3,354	4,845	174.1	0.8	8,090	3,404	4,895	219.1	1.0
8,041	3,355	4,846	174.9	0.8	8,091	3,405	4,896	220.1	1.0
8,042	3,356	4,847	175.7	0.8	8,092	3,406	4,897	221.1	1.1
8,043	3,357	4,848	176.5	0.8	8,093	3,407	4,898	222.2	1.0
8,044	3,358	4,849	177.3		8,094	3,408	4,899	223.2	
				0.8					1.0
8,045	3,359	4,850	178.1	0.8	8,095	3,409	4,900	224.2	1.1
8,046	3,360	4,851	178.9	0.9	8,096	3,410	4,901	225.3	1.0
8,047	3,361	4,852	179.8	0.8	8,097	3,411	4,902	226.3	1.0
8,048	3,362	4,853	180.6	0.8	8,098	3,412	4,903	227.3	1.1
8,049	3,363	4,854	181.4		8,099	3,413	4,904	228.4	
				0.9					1.0
8,050	3,364	4,855	182.3		8,100	3,414	4,905	229.4	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω	log ω''	log ω'''	(τ)		log ω	log ω''	log ω'''	(τ)	
8,...—10	3,...43	4,...02			8,...—10	3,...43	4,...02		
8,100	3,414	4,905	229.4	1.1	8,150	3,464	4,955	288.9	1.3
8,101	3,415	4,906	230.5	1.1	8,151	3,465	4,956	290.2	1.3
8,102	3,416	4,907	231.6	1.0	8,152	3,466	4,957	291.5	1.4
8,103	3,417	4,908	232.6	1.1	8,153	3,467	4,958	292.9	1.3
8,104	3,418	4,909	233.7	1.1	8,154	3,468	4,959	294.2	1.4
8,105	3,419	4,910	234.8	1.1	8,155	3,469	4,960	295.6	1.4
8,106	3,420	4,911	235.9	1.1	8,156	3,470	4,961	297.0	1.3
8,107	3,421	4,912	237.0	1.1	8,157	3,471	4,962	298.3	1.4
8,108	3,422	4,913	238.1	1.1	8,158	3,472	4,963	299.7	1.4
8,109	3,423	4,914	239.2	1.1	8,159	3,473	4,964	301.1	1.4
8,110	3,424	4,915	240.3	1.1	8,160	3,474	4,965	302.5	1.4
8,111	3,425	4,916	241.4	1.1	8,161	3,475	4,966	303.9	1.4
8,112	3,426	4,917	242.5	1.1	8,162	3,476	4,967	305.3	1.4
8,113	3,427	4,918	243.6	1.1	8,163	3,477	4,968	306.7	1.4
8,114	3,428	4,919	244.7	1.2	8,164	3,478	4,969	308.1	1.4
8,115	3,429	4,920	245.9	1.1	8,165	3,479	4,970	309.5	1.4
8,116	3,430	4,921	247.0	1.1	8,166	3,480	4,971	310.9	1.5
8,117	3,431	4,922	248.1	1.2	8,167	3,481	4,972	312.4	1.4
8,118	3,432	4,923	249.3	1.1	8,168	3,482	4,973	313.8	1.5
8,119	3,433	4,924	250.4	1.2	8,169	3,483	4,974	315.3	1.4
8,120	3,434	4,925	251.6	1.1	8,170	3,484	4,975	316.7	1.5
8,121	3,435	4,926	252.7	1.2	8,171	3,485	4,976	318.2	1.5
8,122	3,436	4,927	253.9	1.2	8,172	3,486	4,977	319.7	1.4
8,123	3,437	4,928	255.1	1.2	8,173	3,487	4,978	321.1	1.5
8,124	3,438	4,929	256.3	1.1	8,174	3,488	4,979	322.6	1.5
8,125	3,439	4,930	257.4	1.2	8,175	3,489	4,980	324 1	1.5
8,126	3,440	4,931	258.6	1.2	8,176	3,490	4,981	325.6	1.5
8,127	3,441	4,932	259.8	1.2	8,177	3,491	4,982	327.1	1.5
8,128	3,442	4,933	261.0	1.2	8,178	3,492	4,983	328.6	1.5
8,129	3,443	4,934	262.2	1.2	8,179	3,493	4,984	330.1	1.6
8,130	3,444	4,935	263.4	1.3	8,180	3,494	4,985	331.7	1.5
8,131	3,445	4,936	264.7	1.2	8,181	3,495	4,986	333.2	1.5
8,132	3,446	4,937	265.9	1.2	8,182	3,496	4,987	334.7	1.6
8,133	3,447	4,938	267.1	1.2	8,183	3,497	4,988	336.3	1.5
8,134	3,448	4,939	268.3	1.3	8,184	3,498	4,989	337.8	1.6
8,135	3,449	4,940	269.6	1.2	8,185	3,499	4,990	339.4	1.5
8,136	3,450	4,941	270.8	1.3	8,186	3,500	4,991	340.9	1.6
8,137	3,451	4,942	272.1	1.2	8,187	3,501	4,992	342.5	1.6
8,138	3,452	4,943	273.3	1.3	8,188	3,502	4,993	344.1	1.6
8,139	3,453	4,944	274.6	1.3	8,189	3,503	4,994	345.7	1.6
8,140	3,454	4,945	275.9	1.2	8,190	3,504	4,995	347.3	1.6
8,141	3,455	4,946	277.1	1.3	8,191	3,505	4,996	348.9	1.6
8,142	3,456	4,947	278.4	1.3	8,192	3,506	4,997	350.5	1.6
8,143	3,457	4,948	279.7	1.3	8,193	3,507	4,998	352.1	1.6
8,144	3,458	4,949	281.0	1.3	8,194	3,508	4,999	353.7	1.7
8,145	3,459	4,950	282.3	1.3	8,195	3,509	5,000	355.4	1.6
8,146	3,460	4,951	283.6	1.3	8,196	3,510	5,001	357.0	1.7
8,147	3,461	4,952	284.9	1.3	8,197	3,511	5,002	358.7	1.6
8,148	3,462	4,953	286.2	1.3	8,198	3,512	5,003	360.3	1.7
8,149	3,463	4,954	287.5	1.4	8,199	3,513	5,004	362.0	1.7
8,150	3,464	4,955	288.9		8,200	3,514	5,005	363.7	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω	log ω''	log ω'''	(τ)		log ω	log ω''	log ω'''	(τ)	
8,...—10	3,...43	5,...02			8,...—10	3,...43	5,...02		
8,200	3,514	5,005	363.7	1.6	8,250	3,564	5,055	457.8	2.1
8,201	3,515	5,006	365.3	1.7	8,251	3,565	5,056	459.9	2.2
8,202	3,516	5,007	367.0	1.7	8,252	3,566	5,057	462.1	2.1
8,203	3,517	5,008	368.7	1.7	8,253	3,567	5,058	464.2	2.1
8,204	3,518	5,009	370.4	1.7	8,254	3,568	5,059	466.3	2.2
8,205	3,519	5,010	372.1	1.7	8,255	3,569	5,060	468.5	2.1
8,206	3,520	5,011	373.8	1.8	8,256	3,570	5,061	470.6	2.2
8,207	3,521	5,012	375.6	1.7	8,257	3,571	5,062	472.8	2.2
8,208	3,522	5,013	377.3	1.7	8,258	3,572	5,063	475.0	2.2
8,209	3,523	5,014	379.0	1.8	8,259	3,573	5,064	477.2	2.2
8,210	3,524	5,015	380.8	1.8	8,260	3,574	5,065	479.4	2.2
8,211	3,525	5,016	382.6	1.7	8,261	3,575	5,066	481.6	2.2
8,212	3,526	5,017	384.3	1.8	8,262	3,576	5,067	483.8	2.3
8,213	3,527	5,018	386.1	1.8	8,263	3,577	5,068	486.1	2.2
8,214	3,528	5,019	387.9	1.8	8,264	3,578	5,069	488.3	2.3
8,215	3,529	5,020	389.7	1.8	8,265	3,579	5,070	490.6	2.2
8,216	3,530	5,021	391.5	1.8	8,266	3,580	5,071	492.8	2.3
8,217	3,531	5,022	393.3	1.8	8,267	3,581	5,072	495.1	2.3
8,218	3,532	5,023	395.1	1.8	8,268	3,582	5,073	497.4	2.3
8,219	3,533	5,024	396.9	1.8	8,269	3,583	5,074	499.7	2.3
8,220	3,534	5,025	398.7	1.9	8,270	3,584	5,075	502.0	2.3
8,221	3,535	5,026	400.6	1.8	8,271	3,585	5,076	504.3	2.3
8,222	3,536	5,027	402.4	1.9	8,272	3,586	5,077	506.6	2.4
8,223	3,537	5,028	404.3	1.9	8,273	3,587	5,078	509.0	2.3
8,224	3,538	5,029	406.2	1.8	8,274	3,588	5,079	511.3	2.4
8,225	3,539	5,030	408.0	1.9	8,275	3,589	5,080	513.7	2.4
8,226	3,540	5,031	409.9	1.9	8,276	3,590	5,081	516.1	2.3
8,227	3,541	5,032	411.8	1.9	8,277	3,591	5,082	518.4	2.4
8,228	3,542	5,033	413.7	1.9	8,278	3,592	5,083	520.8	2.4
8,229	3,543	5,034	415.6	1.9	8,279	3,593	5,084	523.2	2.5
8,230	3,544	5,035	417.5	2.0	8,280	3,594	5,085	525.7	2.4
8,231	3,545	5,036	419.5	1.9	8,281	3,595	5,086	528.1	2.4
8,232	3,546	5,037	421.4	1.9	8,282	3,596	5,087	530.5	2.5
8,233	3,547	5,038	423.3	2.0	8,283	3,597	5,088	533.0	2.4
8,234	3,548	5,039	425.3	2.0	8,284	3,598	5,089	535.4	2.5
8,235	3,549	5,040	427.3	1.9	8,285	3,599	5,090	537.9	2.5
8,236	3,550	5,041	429.2	2.0	8,286	3,600	5,091	540.4	2.5
8,237	3,551	5,042	431.2	2.0	8,287	3,601	5,092	542.9	2.5
8,238	3,552	5,043	433.2	2.0	8,288	3,602	5,093	545.4	2.5
8,239	3,553	5,044	435.2	2.0	8,289	3,603	5,094	547.9	2.5
8,240	3,554	5,045	437.2	2.0	8,290	3,604	5,095	550.4	2.6
8,241	3,555	5,046	439.2	2.1	8,291	3,605	5,096	553.0	2.5
8,242	3,556	5,047	441.3	2.0	8,292	3,606	5,097	555.5	2.6
8,243	3,557	5,048	443.3	2.0	8,293	3,607	5,098	558.1	2.6
8,244	3,558	5,049	445.3	2.1	8,294	3,608	5,099	560.7	2.6
8,245	3,559	5,050	447.4	2.1	8,295	3,609	5,100	563.3	2.6
8,246	3,560	5,051	449.5	2.0	8,296	3,610	5,101	565.9	2.6
8,247	3,561	5,052	451.5	2.1	8,297	3,611	5,102	568.5	2.6
8,248	3,562	5,053	453.6	2.1	8,298	3,612	5,103	571.1	2.6
8,249	3,563	5,054	455.7	2.1	8,299	3,613	5,104	573.7	2.7
8,250	3,564	5,055	457.8		8,300	3,614	5,105	576.4	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von $\log \omega$, $\log \sin \omega$ und $\log \operatorname{tang} \omega$.

$\log \omega$ 8,...—10	$\log \omega''$ 3,...43	$\log \omega'''$ 5,...02	(τ)		$\log \omega$ 8,...—10	$\log \omega''$ 3,...43	$\log \omega'''$ 5,...02	(τ)	
8,300	3,614	5,105	576.4		8,350	3,664	5,155	725.6	
8,301	3,615	5,106	579.0	2.6	8,351	3,665	5,156	729.0	3.4
8,302	3,616	5,107	581.7	2.7	8,352	3,666	5,157	732.3	3.3
8,303	3,617	5,108	584.4	2.7	8,353	3,667	5,158	735.7	3.4
8,304	3,618	5,109	587.1	2.7	8,354	3,668	5,159	739.1	3.4
8,305	3,619	5,110	589.8	2.7	8,355	3,669	5,160	742.5	3.4
8,306	3,620	5,111	592.5	2.7	8,356	3,670	5,161	746.0	3.5
8,307	3,621	5,112	595.3	2.8	8,357	3,671	5,162	749.4	3.4
8,308	3,622	5,113	598.0	2.7	8,358	3,672	5,163	752.9	3.5
8,309	3,623	5,114	600.8	2.8	8,359	3,673	5,164	756.3	3.4
8,310	3,624	5,115	603.5	2.7	8,360	3,674	5,165	759.8	3.5
8,311	3,625	5,116	606.3	2.8	8,361	3,675	5,166	763.3	3.5
8,312	3,626	5,117	609.1	2.8	8,362	3,676	5,167	766.9	3.6
8,313	3,627	5,118	611.9	2.8	8,363	3,677	5,168	770.4	3.5
8,314	3,628	5,119	614.8	2.9	8,364	3,678	5,169	774.0	3.6
8,315	3,629	5,120	617.6	2.8	8,365	3,679	5,170	777.5	3.5
8,316	3,630	5,121	620.4	2.8	8,366	3,680	5,171	781.1	3.6
8,317	3,631	5,122	623.3	2.9	8,367	3,681	5,172	784.7	3.6
8,318	3,632	5,123	626.2	2.9	8,368	3,682	5,173	788.3	3.6
8,319	3,633	5,124	629.1	2.9	8,369	3,683	5,174	792.0	3.7
8,320	3,634	5,125	632.0	2.9	8,370	3,684	5,175	795.6	3.6
8,321	3,635	5,126	634.9	2.9	8,371	3,685	5,176	799.3	3.7
8,322	3,636	5,127	637.8	2.9	8,372	3,686	5,177	803.0	3.7
8,323	3,637	5,128	640.8	3.0	8,373	3,687	5,178	806.7	3.7
8,324	3,638	5,129	643.7	2.9	8,374	3,688	5,179	810.4	3.7
8,325	3,639	5,130	646.7	3.0	8,375	3,689	5,180	814.2	3.8
8,326	3,640	5,131	649.7	3.0	8,376	3,690	5,181	817.9	3.7
8,327	3,641	5,132	652.7	3.0	8,377	3,691	5,182	821.7	3.8
8,328	3,642	5,133	655.7	3.0	8,378	3,692	5,183	825.5	3.8
8,329	3,643	5,134	658.7	3.0	8,379	3,693	5,184	829.3	3.8
8,330	3,644	5,135	661.8	3.1	8,380	3,694	5,185	833.1	3.8
8,331	3,645	5,136	664.8	3.0	8,381	3,695	5,186	837.0	3.9
8,332	3,646	5,137	667.9	3.1	8,382	3,696	5,187	840.9	3.9
8,333	3,647	5,138	671.0	3.1	8,383	3,697	5,188	844.7	3.8
8,334	3,648	5,139	674.1	3.1	8,384	3,698	5,189	848.6	3.9
8,335	3,649	5,140	677.2	3.1	8,385	3,699	5,190	852.6	4.0
8,336	3,650	5,141	680.3	3.1	8,386	3,700	5,191	856.5	3.9
8,337	3,651	5,142	683.5	3.2	8,387	3,701	5,192	860.4	3.9
8,338	3,652	5,143	686.6	3.1	8,388	3,702	5,193	864.4	4.0
8,339	3,653	5,144	689.8	3.2	8,389	3,703	5,194	868.4	4.0
8,340	3,654	5,145	693.0	3.2	8,390	3,704	5,195	872.4	4.0
8,341	3,655	5,146	696.2	3.2	8,391	3,705	5,196	876.4	4.0
8,342	3,656	5,147	699.4	3.2	8,392	3,706	5,197	880.5	4.1
8,343	3,657	5,148	702.6	3.2	8,393	3,707	5,198	884.6	4.1
8,344	3,658	5,149	705.8	3.2	8,394	3,708	5,199	888.6	4.0
8,345	3,659	5,150	709.1	3.3	8,395	3,709	5,200	892.7	4.1
8,346	3,660	5,151	712.4	3.3	8,396	3,710	5,201	896.9	4.2
8,347	3,661	5,152	715.7	3.3	8,397	3,711	5,202	901.0	4.1
8,348	3,662	5,153	719.0	3.3	8,398	3,712	5,203	905.2	4.2
8,349	3,663	5,154	722.3	3.3	8,399	3,713	5,204	909.3	4.1
8,350	3,664	5,155	725.6	3.3	8,400	3,714	5,205	913.5	4.2

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω''' 5,...02	(τ)	
8,400	3,714	5,205	913.5	4.3
8,401	3,715	5,206	917.8	4.2
8,402	3,716	5,207	922.0	4.2
8,403	3,717	5,208	926.2	4.3
8,404	3,718	5,209	930.5	4.3
8,405	3,719	5,210	934.8	4.3
8,406	3,720	5,211	939.1	4.4
8,407	3,721	5,212	943.5	4.3
8,408	3,722	5,213	947.8	4.4
8,409	3,723	5,214	952.2	4.4
8,410	3,724	5,215	956.6	4.4
8,411	3,725	5,216	961.0	4.5
8,412	3,726	5,217	965.5	4.4
8,413	3,727	5,218	969.9	4.5
8,414	3,728	5,219	974.4	4.5
8,415	3,729	5,220	978.9	4.5
8,416	3,730	5,221	983.4	4.5
8,417	3,731	5,222	987.9	4.6
8,418	3,732	5,223	992.5	4.6
8,419	3,733	5,224	997.1	4.6
8,420	3,734	5,225	1001.7	4.6
8,421	3,735	5,226	1006.3	4.7
8,422	3,736	5,227	1011.0	4.6
8,423	3,737	5,228	1015.6	4.7
8,424	3,738	5,229	1020.3	4.7
8,425	3,739	5,230	1025.0	4.8
8,426	3,740	5,231	1029.8	4.7
8,427	3,741	5,232	1034.5	4.8
8,428	3,742	5,233	1039.3	4.8
8,429	3,743	5,234	1044.1	4.8
8,430	3,744	5,235	1048.9	4.8
8,431	3,745	5,236	1053.7	4.9
8,432	3,746	5,237	1058.6	4.9
8,433	3,747	5,238	1063.5	4.9
8,434	3,748	5,239	1068.4	4.9
8,435	3,749	5,240	1073.3	5.0
8,436	3,750	5,241	1078.3	5.0
8,437	3,751	5,242	1083.3	5.0
8,438	3,752	5,243	1088.3	5.0
8,439	3,753	5,244	1093.3	5.0
8,440	3,754	5,245	1098.3	5.1
8,441	3,755	5,246	1103.4	5.1
8,442	3,756	5,247	1108.5	5.1
8,443	3,757	5,248	1113.6	5.2
8,444	3,758	5,249	1118.8	5.1
8,445	3,759	5,250	1123.9	5.2
8,446	3,760	5,251	1129.1	5.2
8,447	3,761	5,252	1134.3	5.3
8,448	3,762	5,253	1139.6	5.2
8,449	3,763	5,254	1144.8	5.3
8,450	3,764	5,255	1150.1	

log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω''' 5,...02	(τ)	
8,450	3,764	5,255	1150.1	5.3
8,451	3,765	5,256	1155.4	5.4
8,452	3,766	5,257	1160.8	5.3
8,453	3,767	5,258	1166.1	5.4
8,454	3,768	5,259	1171.5	5.4
8,455	3,769	5,260	1176.9	5.4
8,456	3,770	5,261	1182.3	5.5
8,457	3,771	5,262	1187.8	5.5
8,458	3,772	5,263	1193.3	5.5
8,459	3,773	5,264	1198.8	5.5
8,460	3,774	5,265	1204.3	5.6
8,461	3,775	5,266	1209.9	5.6
8,462	3,776	5,267	1215.5	5.6
8,463	3,777	5,268	1221.1	5.6
8,464	3,778	5,269	1226.7	5.7
8,465	3,779	5,270	1232.4	5.7
8,466	3,780	5,271	1238.1	5.7
8,467	3,781	5,272	1243.8	5.7
8,468	3,782	5,273	1249.5	5.8
8,469	3,783	5,274	1255.3	5.8
8,470	3,784	5,275	1261.1	5.8
8,471	3,785	5,276	1266.9	5.9
8,472	3,786	5,277	1272.8	5.9
8,473	3,787	5,278	1278.7	5.9
8,474	3,788	5,279	1284.6	5.9
8,475	3,789	5,280	1290.5	5.9
8,476	3,790	5,281	1296.4	6.0
8,477	3,791	5,282	1302.4	6.0
8,478	3,792	5,283	1308.4	6.1
8,479	3,793	5,284	1314.5	6.1
8,480	3,794	5,285	1320.6	6.0
8,481	3,795	5,286	1326.6	6.2
8,482	3,796	5,287	1332.8	6.1
8,483	3,797	5,288	1338.9	6.2
8,484	3,798	5,289	1345.1	6.2
8,485	3,799	5,290	1351.3	6.3
8,486	3,800	5,291	1357.6	6.2
8,487	3,801	5,292	1363.8	6.3
8,488	3,802	5,293	1370.1	6.3
8,489	3,803	5,294	1376.4	6.4
8,490	3,804	5,295	1382.8	6.4
8,491	3,805	5,296	1389.2	6.4
8,492	3,806	5,297	1395.6	6.4
8,493	3,807	5,298	1402.0	6.5
8,494	3,808	5,299	1408.5	6.5
8,495	3,809	5,300	1415.0	6.6
8,496	3,810	5,301	1421.6	6.5
8,497	3,811	5,302	1428.1	6.6
8,498	3,812	5,303	1434.7	6.6
8,499	3,813	5,304	1441.3	6.7
8,500	3,814	5,305	1448.0	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω^{m} 5,...02	(τ)		log ω 8,...—10	log ω'' 3,...43	log ω^{m} 5,...02	(τ)	
8,500	3,814	5,305	1448.0	6.7	8,550	3,864	5,355	1823.0	8.4
8,501	3,815	5,306	1454.7	6.7	8,551	3,865	5,356	1831.4	8.5
8,502	3,816	5,307	1461.4	6.7	8,552	3,866	5,357	1839.9	8.5
8,503	3,817	5,308	1468.1	6.8	8,553	3,867	5,358	1848.4	8.5
8,504	3,818	5,309	1474.9	6.8	8,554	3,868	5,359	1856.9	8.6
8,505	3,819	5,310	1481.7	6.9	8,555	3,869	5,360	1865.5	8.6
8,506	3,820	5,311	1488.6	6.8	8,556	3,870	5,361	1874.1	8.7
8,507	3,821	5,312	1495.4	6.9	8,557	3,871	5,362	1882.8	8.7
8,508	3,822	5,313	1502.3	7.0	8,558	3,872	5,363	1891.5	8.7
8,509	3,823	5,314	1509.3	6.9	8,559	3,873	5,364	1900.2	8.8
8,510	3,824	5,315	1516.2	7.0	8,560	3,874	5,365	1909.0	8.8
8,511	3,825	5,316	1523.2	7.1	8,561	3,875	5,366	1917.8	8.8
8,512	3,826	5,317	1530.3	7.0	8,562	3,876	5,367	1926.6	8.9
8,513	3,827	5,318	1537.3	7.1	8,563	3,877	5,368	1935.5	9.0
8,514	3,828	5,319	1544.4	7.2	8,564	3,878	5,369	1944.5	8.9
8,515	3,829	5,320	1551.6	7.1	8,565	3,879	5,370	1953.4	9.1
8,516	3,830	5,321	1558.7	7.2	8,566	3,880	5,371	1962.5	9.0
8,517	3,831	5,322	1565.9	7.3	8,567	3,881	5,372	1971.5	9.1
8,518	3,832	5,323	1573.2	7.2	8,568	3,882	5,373	1980.6	9.2
8,519	3,833	5,324	1580.4	7.3	8,569	3,883	5,374	1989.8	9.2
8,520	3,834	5,325	1587.7	7.4	8,570	3,884	5,375	1999.0	9.2
8,521	3,835	5,326	1595.1	7.3	8,571	3,885	5,376	2008.2	9.3
8,522	3,836	5,327	1602.4	7.4	8,572	3,886	5,377	2017.5	9.3
8,523	3,837	5,328	1609.8	7.4	8,573	3,887	5,378	2026.8	9.3
8,524	3,838	5,329	1617.2	7.5	8,574	3,888	5,379	2036.1	9.4
8,525	3,839	5,330	1624.7	7.5	8,575	3,889	5,380	2045.5	9.5
8,526	3,840	5,331	1632.2	7.5	8,576	3,890	5,381	2055.0	9.5
8,527	3,841	5,332	1639.7	7.6	8,577	3,891	5,382	2064.5	9.5
8,528	3,842	5,333	1647.3	7.6	8,578	3,892	5,383	2074.0	9.6
8,529	3,843	5,334	1654.9	7.7	8,579	3,893	5,384	2083.6	9.6
8,530	3,844	5,335	1662.6	7.6	8,580	3,894	5,385	2093.2	9.7
8,531	3,845	5,336	1670.2	7.8	8,581	3,895	5,386	2102.9	9.7
8,532	3,846	5,337	1678.0	7.7	8,582	3,896	5,387	2112.6	9.7
8,533	3,847	5,338	1685.7	7.8	8,583	3,897	5,388	2122.3	9.8
8,534	3,848	5,339	1693.5	7.8	8,584	3,898	5,389	2132.1	9.9
8,535	3,849	5,340	1701.3	7.9	8,585	3,899	5,390	2142.0	9.9
8,536	3,850	5,341	1709.2	7.9	8,586	3,900	5,391	2151.9	9.9
8,537	3,851	5,342	1717.1	7.9	8,587	3,901	5,392	2161.8	10.0
8,538	3,852	5,343	1725.0	7.9	8,588	3,902	5,393	2171.8	10.0
8,539	3,853	5,344	1732.9	8.0	8,589	3,903	5,394	2181.8	10.1
8,540	3,854	5,345	1740.9	8.1	8,590	3,904	5,395	2191.9	10.1
8,541	3,855	5,346	1749.0	8.1	8,591	3,905	5,396	2202.0	10.2
8,542	3,856	5,347	1757.1	8.1	8,592	3,906	5,397	2212.2	10.2
8,543	3,857	5,348	1765.2	8.1	8,593	3,907	5,398	2222.4	10.2
8,544	3,858	5,349	1773.3	8.2	8,594	3,908	5,399	2232.6	10.4
8,545	3,859	5,350	1781.5	8.2	8,595	3,909	5,400	2243.0	10.3
8,546	3,860	5,351	1789.7	8.3	8,596	3,910	5,401	2253.3	10.4
8,547	3,861	5,352	1798.0	8.3	8,597	3,911	5,402	2263.7	10.5
8,548	3,862	5,353	1806.3	8.3	8,598	3,912	5,403	2274.2	10.5
8,549	3,863	5,354	1814.6	8.4	8,599	3,913	5,404	2284.7	10.5
8,550	3,864	5,355	1823.0		8,600	3,914	5,405	2295.2	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von $\log \omega$, $\log \sin \omega$ und $\log \operatorname{tang} \omega$.

$\log \omega$	$\log \omega''$	$\log \omega'''$	(τ)	(σ)	$\log \omega$	$\log \omega''$	$\log \omega'''$	(τ)	(σ)
8,...—10	3,...43	5....02			8,...—10	3,...43	5,...02		
8,600	3,914	5,405	2295.2 10.6	1147.3 5.3	8,650	3,964	5,455	2889.8 13.3	1444.3 6.6
8,601	3,915	5,406	2305.8 10.7	1152.6 5.3	8,651	3,965	5,456	2903.1 13.4	1450.9 6.7
8,602	3,916	5,407	2316.5 10.7	1157.9 5.3	8,652	3,966	5,457	2916.5 13.5	1457.6 6.7
8,603	3,917	5,408	2327.2 10.7	1163.2 5.4	8,653	3,967	5,458	2930.0 13.5	1464.3 6.8
8,604	3,918	5,409	2337.9	1168.6	8,654	3,968	5,459	2943.5	1471.1
			10.8	5.4				13.6	6.8
8,605	3,919	5,410	2348.7 10.8	1174.0 5.4	8,655	3,969	5,460	2957.1 13.7	1477.9 6.8
8,606	3,920	5,411	2359.5 10.9	1179.4 5.5	8,656	3,970	5,461	2970.8 13.7	1484.7 6.8
8,607	3,921	5,412	2370.4 11.0	1184.9 5.5	8,657	3,971	5,462	2984.5 13.8	1491 5 6.9
8,608	3,922	5,413	2381.4 11.0	1190.4 5.5	8,658	3,972	5,463	2998.3 13.8	1498.4 6.9
8,609	3,923	5,414	2392 4	1195.9	8,659	3,973	5,464	3012.1	1505.3
			11.0	5.5				13.9	7.0
8,610	3,924	5,415	2403 4 11.1	1201.4 5.6	8,660	3,974	5,465	3026.0 14.0	1512.3 7.0
8,611	3,925	5,416	2414.5 11.2	1207.0 5.6	8,661	3,975	5,466	3040.0 14.1	1519.3 7.0
8,612	3,926	5,417	2425.7 11.2	1212 6 5.6	8,662	3,976	5,467	3054.1 14.1	1526.3 7.0
8,613	3,927	5,418	2436.9 11.2	1218.2 5.6	8,663	3,977	5,468	3068.2 14.1	1533.3 7.1
8,614	3,928	5,419	2448.1	1223.8	8,664	3,978	5,469	3082.3	1540.4
			11.3	5.7				14.3	7.1
8,615	3,929	5,420	2459.4 11.4	1229.5 5.7	8,665	3,979	5,470	3096.6 14.3	1547.5 7.1
8,616	3,930	5,421	2470.8 11.4	1235.2 5.7	8,666	3,980	5,471	3110.9 14.3	1554.6 7.1
8,617	3,931	5,422	2482.2 11.5	1240.9 5.7	8,667	3,981	5,472	3125.2 14.5	1561.7 7.2
8,618	3,932	5,423	2493.7 11 5	1246.6 5.7	8,668	3,982	5,473	3139.7 14.5	1568.9 7.2
8,619	3,933	5,424	2505.2	1252.3	8,669	3,983	5,474	3154.2	1576.1
			11.5	5.8				14.5	7.3
8,620	3,934	5,425	2516.7 11.7	1258.1 5.8	8,670	3,984	5,475	3168.7 14.7	1583.4 7.3
8,621	3,935	5,426	2528 4 11.6	1263.9 5.8	8,671	3,985	5,476	3183.4 14.7	1590.7 7.3
8,622	3,936	5,427	2540.0 11.8	1269.7 5.9	8,672	3,986	5,477	3198.1 14.7	1598.0 7.4
8,623	3,937	5,428	2551.8 11.8	1275.6 5.9	8,673	3,987	5,478	3212.8 14.9	1605.4 7.4
8,624	3,938	5,429	2563.6	1281.5	8,674	3,988	5,479	3227.7	1612.8
			11.8	5.9				14.9	7.4
8,625	3,939	5,430	2575.4 11.9	1287.4 5.9	8,675	3,989	5,480	3242.6 15.0	1620.2 7.5
8,626	3,940	5,431	2587.3 11.9	1293.3 6.0	8,676	3,990	5,481	3257.6 15.0	1627.7 7.5
8,627	3,941	5,432	2599.2 12.0	1299.3 6.0	8,677	3,991	5,482	3272.6 15.1	1635.2 7.6
8,628	3,942	5,433	2611.2 12.1	1305.3 6.0	8,678	3,992	5,483	3287.7 15.2	1642.8 7.6
8,629	3,943	5,434	2623.3	1311.3	8,679	3,993	5,484	3302.9	1650.4
			12.1	6.1				15.2	7.6
8,630	3,944	5,435	2635.4 12.2	1317.4 6.1	8,680	3,994	5,485	3318.1 15.4	1658.0 7.7
8,631	3,945	5,436	2647.6 12.2	1323.5 6.1	8,681	3,995	5,486	3333.5 15.4	1665.7 7.7
8,632	3,946	5,437	2659.8 12.3	1329.6 6.1	8,682	3,996	5,487	3348.9 15.5	1673.4 7.8
8,633	3,947	5,438	2672.1 12.3	1335.7 6.2	8,683	3,997	5,488	3364.4 15.5	1681.2 7.8
8,634	3,948	5,439	2684.4	1341.9	8,684	3,998	5,489	3379.9	1689.0
			12.4	6.2				15.6	7.8
8,635	3,949	5,440	2696.8 12.5	1348.1 6.2	8,685	3,999	5,490	3495.5 15.7	1696.8 7.8
8,636	3,950	5,441	2709.3 12.5	1354.3 6.2	8,686	4,000	5,491	3411.2 15.7	1704.6 7.9
8,637	3,951	5,442	2721.8 12.6	1360.5 6.3	8,687	4,001	5,492	3426.9 15.8	1712.5 7.9
8,638	3,952	5,443	2734.4 12.6	1366.8 6.3	8,688	4,002	5,493	3442.7 15.9	1720.4 7.9
8,639	3,953	5,444	2747.0	1373.1	8,689	4,003	5,494	3458.6	1728.3
			12.7	6.3				16.0	8.0
8,640	3,954	5,445	2759.7 12.7	1379.4 6.4	8,690	4,004	5,495	3474.6 16.1	1736.3 8.0
8,641	3,955	5,446	2772.4 12.8	1385.8 6.4	8,691	4,005	5,496	3490.7 16.1	1744.3 8.1
8,642	3,956	5,447	2785.2 12.9	1392.2 6.4	8,692	4,006	5,497	3506.8 16.2	1752.4 8.1
8,643	3,957	5,448	2798.1 12.9	1398.6 6.4	8,693	4,007	5,498	3523.0 16.2	1760.5 8.1
8,644	3,958	5,449	2811.0	1405 0	8,694	4,008	5,499	3539.2	1768.6
			13 0	6.5				16.4	8.2
8,645	3,959	5,450	2824.0 13.0	1411.5 6.5	8,695	4,009	5,500	3555.6 16.4	1776.8 8.2
8,646	3,960	5,451	2837.0 13.1	1418.0 6.5	8,696	4,010	5,501	3572.0 16.5	1785.0 8.3
8,647	3,961	5,452	2850.1 13.2	1424.5 6.6	8,697	4,011	5,502	3588.5 16.6	1793.3 8.3
8,648	3,962	5,453	2863.3 13.2	1431.1 6.6	8,698	4,012	5,503	3605.1 16.6	1801.6 8.3
8,649	3,963	5,454	2876.5	1437.7	8,699	4,013	5,504	3621.7	1809.9
			13.3	6.6				16.8	8.4
8,650	3,964	5,455	2889.8	1444.3	8,700	4,014	5,505	3638.5	1818.3

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω 8,...—10	log ω'' 4,...43	log ω''' 5,...02	(τ)		(σ)		log ω 8,...—10	log ω'' 4,...43	log ω''' 5,...02	(τ)		(σ)	
8,700	4,014	5,505	3638.5	16.8	1818.3	8.4	8,750	4,064	5,555	4581.2	21.2	2289.2	10.6
8,701	4,015	5,506	3655.3	16.8	1826.7	8.4	8,751	4,065	5,556	4602.4	21.3	2299.8	10.6
8,702	4,016	5,507	3672.1	17.0	1835.1	8.5	8,752	4,066	5,557	4623.7	21.3	2310.4	10.7
8,703	4,017	5,508	3689.1	17.0	1843.6	8.5	8,753	4,067	5,558	4645.0	21.5	2321.1	10.7
8,704	4,018	5,509	3706.1	17.2	1852.1	8.6	8,754	4,068	5,559	4666.5	21.5	2331.8	10.7
8,705	4,019	5,510	3723.3	17.2	1860.7	8.6	8,755	4,069	5,560	4688.0	21.7	2342.5	10.8
8,706	4,020	5,511	3740.5	17.2	1869.3	8.6	8,756	4,070	5,561	4709.7	21.7	2353.3	10.8
8,707	4,021	5,512	3757.7	17.4	1877.9	8.7	8,757	4,071	5,562	4731.4	21.9	2364.1	10.9
8,708	4,022	5,513	3775.1	17.4	1886.6	8.7	8,758	4,072	5,563	4753.3	22.0	2375.0	11.0
8,709	4,023	5,514	3792.5	17.5	1895.3	8.7	8,759	4,073	5,564	4775.3	22.0	2386.0	11.0
8,710	4,024	5,515	3810.0	17.6	1904.0	8.8	8,760	4,074	5,565	4797.3	22.2	2397.0	11.1
8,711	4,025	5,516	3827.6	17.7	1912.8	8.8	8,761	4,075	5,566	4819.5	22.2	2408.1	11.1
8,712	4,026	5,517	3845.3	17.8	1921.6	8.9	8,762	4,076	5,567	4841.7	22.4	2419.2	11.2
8,713	4,027	5,518	3863.1	17.8	1930.5	8.9	8,763	4,077	5,568	4864.1	22.5	2430.4	11.2
8,714	4,028	5,519	3880.9	17.9	1939.4	8.9	8,764	4,078	5,569	4886.6	22.6	2441.6	11.3
8,715	4,029	5,520	3898.8	18.1	1948.3	9.0	8,765	4,079	5,570	4909.2	22.6	2452.9	11.3
8,716	4,030	5,521	3916.9	18.0	1957.3	9.0	8,766	4,080	5,571	4931.8	22.8	2464.2	11.4
8,717	4,031	5,522	3934.9	18.2	1966.3	9.1	8,767	4,081	5,572	4954.6	22.9	2475.6	11.4
8,718	4,032	5,523	3953.1	18.3	1975.4	9.1	8,768	4,082	5,573	4977.5	23.0	2487.0	11.5
8,719	4,033	5,524	3971.4	18.3	1984.5	9.1	8,769	4,083	5,574	5000.5	23.1	2498.5	11.5
8,720	4,034	5,525	3989.7	18.4	1993.6	9.2	8,770	4,084	5,575	5023.6	23.2	2510.0	11.6
8,721	4,035	5,526	4008.1	18.6	2002.8	9.3	8,771	4,085	5,576	5046.8	23.3	2521.6	11.6
8,722	4,036	5,527	4026.7	18.6	2012.1	9.3	8,772	4,086	5,577	5070.1	23.4	2533.2	11.7
8,723	4,037	5,528	4045.3	18.6	2021.4	9.3	8,773	4,087	5,578	5093.5	23.6	2544.9	11.8
8,724	4,038	5,529	4063.9	18.8	2030.7	9.4	8,774	4,088	5,579	5117.1	23.6	2556.7	11.8
8,725	4,039	5,530	4082.7	18.9	2040.1	9.4	8,775	4,089	5,580	5140.7	23.8	2568.5	11.9
8,726	4,040	5,531	4101.6	18.9	2049.5	9.4	8,776	4,090	5,581	5164.5	23.8	2580.4	11.9
8,727	4,041	5,532	4120.5	19.0	2058.9	9.5	8,777	4,091	5,582	5188.3	24.0	2592.3	12.0
8,728	4,042	5,533	4139.5	19.2	2068.4	9.6	8,778	4,092	5,583	5212.3	24.1	2604.3	12.0
8,729	4,043	5,534	4158.7	19.2	2078.0	9.6	8,779	4,093	5,584	5236.4	24.2	2616.3	12.1
8,730	4,044	5,535	4177.9	19.3	2087.6	9.6	8,780	4,094	5,585	5260.6	24.3	2628.4	12.1
8,731	4,045	5,536	4197.2	19.4	2097.2	9.7	8,781	4,095	5,586	5284.9	24.4	2640.5	12.2
8,732	4,046	5,537	4216.6	19.4	2106.9	9.7	8,782	4,096	5,587	5309.3	24.5	2652.7	12.2
8,733	4,047	5,538	4236.0	19.6	2116.6	9.8	8,783	4,097	5,588	5333.8	24.6	2664.9	12.3
8,734	4,048	5,539	4255.6	19.7	2126.4	9.8	8,784	4,098	5,589	5358.4	24.8	2677.2	12.4
8,735	4,049	5,540	4275.3	19.7	2136.2	9.8	8,785	4,099	5,590	5383.2	24.8	2689.6	12.4
8,736	4,050	5,541	4295.0	19.8	2146.0	9.9	8,786	4,100	5,591	5408.0	25.0	2702.0	12.5
8,737	4,051	5,542	4314.8	20.0	2155.9	10.0	8,787	4,101	5,592	5433.0	25.1	2714.5	12.5
8,738	4,052	5,543	4334.8	20.0	2165.9	10.0	8,788	4,102	5,593	5458.1	25.3	2727.0	12.6
8,739	4,053	5,544	4354.8	20.1	2175.9	10.0	8,789	4,103	5,594	5483.4	25.3	2739.6	12.6
8,740	4,054	5,545	4374.9	20.2	2185.9	10.1	8,790	4,104	5,595	5508.7	25.4	2752.2	12.7
8,741	4,055	5,546	4395.1	20.3	2196.0	10.1	8,791	4,105	5,596	5534.1	25.6	2764.9	12.8
8,742	4,056	5,547	4415.4	20.4	2206.1	10.2	8,792	4,106	5,597	5559.7	25.7	2777.7	12.8
8,743	4,057	5,548	4435.8	20.5	2216.3	10.2	8,793	4,107	5,598	5585.4	25.8	2790.5	12.9
8,744	4,058	5,549	4456.3	20.6	2226.5	10.3	8,794	4,108	5,599	5611.2	25.9	2803.4	12.9
8,745	4,059	5,550	4476.9	20.7	2236.8	10.3	8,795	4,109	5,600	5637.1	26.1	2816.3	13.0
8,746	4,060	5,551	4497.6	20.7	2247.1	10.4	8,796	4,110	5,601	5663.2	26.1	2829.3	13.0
8,747	4,061	5,552	4518.3	20.9	2257.5	10.5	8,797	4,111	5,602	5689.3	26.3	2842.3	13.1
8,748	4,062	5,553	4539.2	21.0	2268.0	10.6	8,798	4,112	5,603	5715.6	26.4	2855.4	13.2
8,749	4,063	5,554	4560.2	21.0	2278.6	10.6	8,799	4,113	5,604	5742.0	26.6	2868.6	13.3
8,750	4,064	5,555	4581.2		2289.2		8,800	4,114	5,605	5768.6		2881.9	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von $\log \omega$, $\log \sin \omega$ und $\log \operatorname{tang} \omega$.

$\log \omega$	$\log \omega''$	$\log \omega'''$	(τ)		(σ)		$\log \omega$	$\log \omega''$	$\log \omega'''$	(τ)		(σ)	
8,...—10	4,...43	5,...02					8,...—10	4,...43	5,...02				
8,800	4,114	5,605	5768.6	26.6	2881.9	13.3	8,850	4,164	5,655	7263.9	33.6	3628.3	16.8
8,801	4,115	5,606	5795.2	26.8	2895.2	13.4	8,851	4,165	5,656	7297.5	33.7	3645.1	16.8
8,802	4,116	5,607	5822.0	26.9	2908.6	13.4	8,852	4,166	5,657	7331.2	33.9	3661.9	16.9
8,803	4,117	5,608	5848.9	27.0	2922.0	13.5	8,853	4,167	5,658	7365.1	34.0	3678.8	17.0
8,804	4,118	5,609	5875.9	27.1	2935.5	13.5	8,854	4,168	5,659	7399.1	34.2	3695.8	17.1
8,805	4,119	5,610	5903.0	27.3	2949.0	13.6	8,855	4,169	5,660	7433.3	34.4	3712.9	17.1
8,806	4,120	5,611	5930.3	27.4	2962.6	13.7	8,856	4,170	5,661	7467.7	34.5	3730.0	17.2
8,807	4,121	5,612	5957.7	27.5	2976.3	13.7	8,857	4,171	5,662	7502.2	34.7	3747.2	17.3
8,808	4,122	5,613	5985.2	27.7	2990.0	13.8	8,858	4,172	5,663	7536.9	34.8	3764.5	17.4
8,809	4,123	5,614	6012.9	27.8	3003.8	13.9	8,859	4,173	5,664	7571.7	35.0	3781.9	17.4
8,810	4,124	5,615	6040.7	27.9	3017.7	13.9	8,860	4,174	5,665	7606.7	35.1	3799.3	17.5
8,811	4,125	5,616	6068.6	28.0	3031.6	14.0	8,861	4,175	5,666	7641.8	35.4	3816.8	17.6
8,812	4,126	5,617	6096.6	28.2	3045.6	14.1	8,862	4,176	5,667	7677.2	35.4	3834.4	17.7
8,813	4,127	5,618	6124.8	28.3	3059.7	14.1	8,863	4,177	5,668	7712.6	35.7	3852.1	17.8
8,814	4,128	5,619	6153.1	28.4	3073.8	14.2	8,864	4,178	5,669	7748.3	35.8	3869.9	17.9
8,815	4,129	5,620	6181.5	28.6	3088.0	14.3	8,865	4,179	5,670	7784.1	36.0	3887.8	18.0
8,816	4,130	5,621	6210.1	28.7	3102.3	14.3	8,866	4,180	5,671	7820.1	36.1	3905.8	18.0
8,817	4,131	5,622	6238.8	28.8	3116.6	14.4	8,867	4,181	5,672	7856.2	36.3	3923.8	18.1
8,818	4,132	5,623	6267.6	29.0	3131.0	14.5	8,868	4,182	5,673	7892.5	36.5	3941.9	18.2
8,819	4,133	5,624	6296.6	29.1	3145.5	14.5	8,869	4,183	5,674	7929.0	36.6	3960.1	18.3
8,820	4,134	5,625	6325.7	29.2	3160.0	14.6	8,870	4,184	5,675	7965.6	36.8	3978.4	18.3
8,821	4,135	5,626	6354.9	29.3	3174.6	14.6	8,871	4,185	5,676	8002.4	37.0	3996.7	18.5
8,822	4,136	5,627	6384.2	29.5	3189.2	14.7	8,872	4,186	5,677	8039.4	37.2	4015.2	18.6
8,823	4,137	5,628	6413.7	29.7	3203.9	14.8	8,873	4,187	5,678	8076.6	37.3	4033.8	18.6
8,824	4,138	5,629	6443.4	29.8	3218.7	14.9	8,874	4,188	5,679	8113.9	37.5	4052.4	18.7
8,825	4,139	5,630	6473.2	29.9	3233.6	14.9	8,875	4,189	5,680	8151.4	37.7	4071.1	18.8
8,826	4,140	5,631	6503.1	30.0	3248.5	15.0	8,876	4,190	5,681	8189.1	37.8	4089.9	18.9
8,827	4,141	5,632	6533.1	30.2	3263.5	15.1	8,877	4,191	5,682	8226.9	38.1	4108.8	19.0
8,828	4,142	5,633	6563.3	30.3	3278.6	15.1	8,878	4,192	5,683	8265.0	38.2	4127.8	19.0
8,829	4,143	5,634	6593.6	30.5	3293.7	15.2	8,879	4,193	5,684	8303.2	38.3	4146.8	19.1
8,830	4,144	5,635	6624.1	30.6	3308.9	15.3	8,880	4,194	5,685	8341.5	38.6	4165.9	19.2
8,831	4,145	5,636	6654.7	30.8	3324.2	15.4	8,881	4,195	5,686	8380.1	38.7	4185.1	19.3
8,832	4,146	5,637	6685.5	30.8	3339.6	15.4	8,882	4,196	5,687	8418.8	38.9	4204.4	19.4
8,833	4,147	5,638	6716.3	31.1	3355.0	15.5	8,883	4,197	5,688	8457.7	39.1	4223.8	19.5
8,834	4,148	5,639	6747.4	31.2	3370.5	15.6	8,884	4,198	5,689	8496.8	39.3	4243.3	19.6
8,835	4,149	5,640	6778.6	31.3	3386.1	15.6	8,885	4,199	5,690	8536.1	39.5	4262.9	19.7
8,836	4,150	5,641	6809.9	31.5	3401.7	15.7	8,886	4,200	5,691	8575.6	39.6	4282.6	19.8
8,837	4,151	5,642	6841.4	31.6	3417.4	15.8	8,887	4,201	5,692	8615.2	39.8	4302.4	19.9
8,838	4,152	5,643	6873.0	31.7	3433.2	15.8	8,888	4,202	5,693	8655.0	40.0	4322.3	20.0
8,839	4,153	5,644	6904.7	31.9	3449.0	15.9	8,889	4,203	5,694	8695.0	40.2	4342.3	20.1
8,840	4,154	5,645	6936.6	32.1	3464.9	16.0	8,890	4,204	5,695	8735.2	40.4	4362.4	20.2
8,841	4,155	5,646	6968.7	32.2	3480.9	16.1	8,891	4,205	5,696	8775.6	40.6	4382.6	20.2
8,842	4,156	5,647	7000.9	32.3	3497.0	16.2	8,892	4,206	5,697	8816.2	40.7	4402.8	20.3
8,843	4,157	5,648	7033.2	32.5	3513.2	16.2	8,893	4,207	5,698	8856.9	41.0	4423.1	20.4
8,844	4,158	5,649	7065.7	32.7	3529.4	16.3	8,894	4,208	5,699	8897.9	41.1	4443.5	20.5
8,845	4,159	5,650	7098.4	32.8	3545.7	16.4	8,895	4,209	5,700	8939.0	41.3	4464.0	20.6
8,846	4,160	5,651	7131.2	32.9	3562.1	16.4	8,896	4,210	5,701	8980.3	41.5	4484.6	20.7
8,847	4,161	5,652	7164.1	33.1	3578.5	16.5	8,897	4,211	5,702	9021.8	41.7	4505.3	20.8
8,848	4,162	5,653	7197.2	33.3	3595.0	16.6	8,898	4,212	5,703	9063.5	41.9	4526.1	20.9
8,849	4,163	5,654	7230.5	33.4	3611.6	16.7	8,899	4,213	5,704	9105.4	42.1	4547.0	21.0
8,850	4,164	5,655	7263.9		3628.3		8,900	4,214	5,705	9147.5		4568.0	

III. Tafeln zur gegenseitigen Verwandlung von log ω, log sin ω und log tang ω.

log ω	log ω''	log ω'''	(τ)	(σ)	log ω	log ω''	log ω'''	(τ)	(σ)
8,... −10	4,...43	5,...02			8,... −10	4,...43	5,...02		
8,900	4,214	5,705	9147.5 42.3	4568.0 21.1	8,950	4,264	5,755	11520.4 53.3	5751.1 26.5
8,901	4,215	5,706	9189.8 42.5	4589.1 21.2	8,951	4,265	5,756	11573.7 53.5	5777.6 26.6
8,902	4,216	5,707	9232.3 42.7	4610.3 21.2	8,952	4,266	5,757	11627.2 53.8	5804.2 26.8
8,903	4,217	5,708	9275.0 42.8	4631.5 21.4	8,953	4,267	5,758	11681.0 54.0	5831.0 26.9
8,904	4,218	5,709	9317.8 43.1	4652.9 21.5	8,954	4,268	5,759	11735.0 54.3	5857.9 27.1
8,905	4,219	5,710	9360.9 43.3	4674.4 21.5	8,955	4,269	5,760	11789.3 54.5	5885.0 27.2
8,906	4,220	5,711	9404.2 43.5	4695.9 21.7	8,956	4,270	5,761	11843.8 54.8	5912.2 27.3
8,907	4,221	5,712	9447.7 43.6	4717.6 21.8	8,957	4,271	5,762	11898.6 55.0	5939.5 27.4
8,908	4,222	5,713	9491.3 43.9	4739.4 21.8	8,958	4,272	5,763	11953.6 55.3	5966.9 27.6
8,909	4,223	5,714	9535.2 44.1	4761.2 22.0	8,959	4,273	5,764	12008.9 55.5	5994.5 27.7
8,910	4,224	5,715	9579.3 44.3	4783.2 22.1	8,960	4,274	5,765	12064.4 55.8	6022.2 27.8
8,911	4,225	5,716	9623.6 44.5	4805.3 22.1	8,961	4,275	5,766	12120.2 56.1	6050.0 28.0
8,912	4,226	5,717	9668.1 44.7	4827.4 22.3	8,962	4,276	5,767	12176.3 56.3	6078.0 28.1
8,913	4,227	5,718	9712.8 44.9	4849.7 22.4	8,963	4,277	5,768	12232.6 56.6	6106.1 28.3
8,914	4,228	5,719	9757.7 45.1	4872.1 22.4	8,964	4,278	5,769	12289.2 56.8	6134.4 28.4
8,915	4,229	5,720	9802.8 45.3	4894.5 22.6	8,965	4,279	5,770	12346.0 57.1	6162.8 28.5
8,916	4,230	5,721	9848.1 45.5	4917.1 22.7	8,966	4,280	5,771	12403.1 57.4	6191.3 28.6
8,917	4,231	5,722	9893.6 45.8	4939.8 22.8	8,967	4,281	5,772	12460.5 57.6	6219.9 28.8
8,918	4,232	5,723	9939.4 45.9	4962.6 22.9	8,968	4,282	5,773	12518.1 57.9	6248.7 28.9
8,919	4,233	5,724	9985.3 46.2	4985.5 23.1	8,969	4,283	5,774	12576.0 58.2	6277.6 29.1
8,920	4,234	5,725	10031.5 46.4	5008.6 23.1	8,970	4,284	5,775	12634.2 58.4	6306.7 29.2
8,921	4,235	5,726	10077.9 46.5	5031.7 23.2	8,971	4,285	5,776	12692.6 58.7	6335.9 29.3
8,922	4,236	5,727	10124.4 46.9	5054.9 23.4	8,972	4,286	5,777	12751.3 59.0	6365.2 29.5
8,923	4,237	5,728	10171.3 47.0	5078.3 23.4	8,973	4,287	5,778	12810.3 59.3	6394.7 29.6
8,924	4,238	5,729	10218.3 47.2	5101.7 23.6	8,974	4,288	5,779	12869.6 59.5	6424.3 29.7
8,925	4,239	5,730	10265.5 47.5	5125.3 23.7	8,975	4,289	5,780	12929.1 59.8	6454.0 29.8
8,926	4,240	5,731	10313.0 47.7	5149.0 23.7	8,976	4,290	5,781	12988.9 60.1	6483.8 30.0
8,927	4,241	5,732	10360.7 47.9	5172.7 23.9	8,977	4,291	5,782	13049.0 60.3	6513.8 30.1
8,928	4,242	5,733	10408.6 48.1	5196.6 24.0	8,978	4,292	5,783	13109.3 60.7	6543.9 30.3
8,929	4,243	5,734	10456.7 48.3	5220.6 24.1	8,979	4,293	5,784	13170.0 60.9	6574.2 30.4
8,930	4,244	5,735	10505.0 48.6	5244.7 24.2	8,980	4,294	5,785	13230.9 61.2	6604.6 30.5
8,931	4,245	5,736	10553.6 48.8	5268.9 24.4	8,981	4,295	5,786	13292.1 61.5	6635.1 30.7
8,932	4,246	5,737	10602.4 49.0	5293.3 24.4	8,982	4,296	5,787	13353.6 61.7	6665.8 30.8
8,933	4,247	5,738	10651.4 49.3	5317.7 24.6	8,983	4,297	5,788	13415.3 62.1	6696.6 30.9
8,934	4,248	5,739	10700.7 49.5	5342.3 24.7	8,984	4,298	5,789	13477.4 62.3	6727.5 31.1
8,935	4,249	5,740	10750.2 49.7	5367.0 24.7	8,985	4,299	5,790	13539.7 62.7	6758.6 31.2
8,936	4,250	5,741	10799.9 49.9	5391.7 24.9	8,986	4,300	5,791	13602.4 62.9	6789.8 31.3
8,937	4,251	5,742	10849.8 50.2	5416.6 25.1	8,987	4,301	5,792	13665.3 63.2	6821.1 31.5
8,938	4,252	5,743	10900.0 50.4	5441.7 25.1	8,988	4,302	5,793	13728.5 63.5	6852.6 31.6
8,939	4,253	5,744	10950.4 50.6	5466.8 25.3	8,989	4,303	5,794	13792.0 63.8	6884.2 31.7
8,940	4,254	5,745	11001.0 50.9	5492.1 25.4	8,990	4,304	5,795	13855.8 64.1	6915.9 31.9
8,941	4,255	5,746	11051.9 51.1	5517.5 25.4	8,991	4,305	5,796	13919.9 64.4	6947.8 32.0
8,942	4,256	5,747	11103.0 51.3	5542.9 25.6	8,992	4,306	5,797	13984.3 64.7	6979.8 32.1
8,943	4,257	5,748	11154.3 51.6	5568.5 25.8	8,993	4,307	5,798	14049.0 65.0	7011.9 32.3
8,944	4,258	5,749	11205.9 51.8	5594.3 25.8	8,994	4,308	5,799	14114.0 65.3	7044.2 32.4
8,945	4,259	5,750	11257.7 52.1	5620.1 25.9	8,995	4,309	5,800	14179.3 65.6	7076.6 32.5
8,946	4,260	5,751	11309.8 52.3	5646.0 26.1	8,996	4,310	5,801	14244.9 65.9	7109.1 32.7
8,947	4,261	5,752	11362.1 52.5	5672.1 26.2	8,997	4,311	5,802	14310.8 66.2	7141.8 32.8
8,948	4,262	5,753	11414.6 52.8	5698.3 26.4	8,998	4,312	5,803	14377.0 66.5	7174.6 32.9
8,949	4,263	5,754	11467.4 53.0	5724.7 26.4	8,999	4,313	5,804	14443.5 66.9	7207.5 33.1
8,950	4,264	5,755	11520.4	5751.1	9,000	4,314	5,805	14510.4	7240.6

Formeln
für die numerische Berechnung der Tafelgrössen.

I.

q^m.

$$q^m = \frac{8a(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})^3}\left\{\alpha\varphi - \beta\sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\gamma\sin 4\varphi - \tfrac{1}{3}\delta\sin 6\varphi + \cdots\right\}.$$

Hierin ist, wenn jetzt $\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = n$ gesetzt wird,

$$\alpha = 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 n^2 + \left(\frac{3.5}{2.4}\right)^2 n^4 + \left(\frac{3.5.7}{2.4.6}\right)^2 n^6 + \cdots \qquad = 1{,}0000063065.408$$

$$\beta = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}\cdot\frac{3.5}{2.4}n^3 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3.5.7}{2.4.6}n^5 + \cdots \qquad = 0{,}0025112908.999$$

$$\tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{3.5}{2.4}n^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{3.5.7}{2.4.6}n^4 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}n^6 + \cdot\right\} \qquad = 0{,}0000026277.267$$

$$\tfrac{1}{3}\delta = \tfrac{1}{3}\left\{\frac{3.5.7}{2.4.6}n^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}n^5 + \cdots\right\} \qquad = 0{,}0000000034.217.$$

Setzt man die Logarithmen der Constanten in die Gleichung für q^m ein, so erhält man die folgende bequeme Form

$$q^m = [5{,}0457946.544]\,\varphi^\circ - [4{,}2038114.843]\sin 2\varphi + [1{,}2234947.4]\sin 4\varphi - [8{,}338154-10]\sin 6\varphi + \cdots$$

(1) = log R sin 1″.

$$\log R \sin 1'' = \log\frac{8a(1-e^2)\sin 1''}{(1+\sqrt{1-e^2})^3} - 3M\left\{n\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}n^2\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}n^3\cos 6\varphi - \cdots\right\}.$$

Führt man den numerischen Wert des ersten, constanten Gliedes rechts ein, die Logarithmen der Constanten der übrigen Glieder aber in der Weise, dass sich dieselben in Einheiten der 7ten Decimale der Logarithmen darstellen, so ist

$$\log R\sin 1'' = 1{,}4894894.147 - [4{,}3387089.6]\cos 2\varphi + [1{,}2614824]\cos 4\varphi - [8{,}30919-10]\cos 6\varphi + \cdots$$

(2) = log N sin 1″.

$$\log N\sin 1'' = \log\frac{2a\sin 1''}{1+\sqrt{1-e^2}} - M\left\{n\cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}n^2\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}n^3\cos 6\varphi - \cdots\right\}.$$

Verfährt man wie vorher, so folgt

$$\log N \sin 1'' = 1{,}4909448.118 - [3{,}8615877.1] \cos 2\varphi + [0{,}7843611] \cos 4\varphi - [7{,}83207-10] \cos 6\varphi + \cdots$$

Die Tafelwerte in den übrigen Spalten (3) bis (7) sind unmittelbare Ableitungen von (1) und (2), wie die Functionen am Kopfe dieser Spalten angeben.

I. A.

Bei der mit den Walbeckschen Elementen des Erdsphäroides ausgeführten Berechnung der numerischen Werte der Tafelgrössen wurden die folgenden Formeln angewendet.

$$\log R \sin 1'' = \frac{a(1-e^2)\sin 1''}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = [1{,}4873106.397] \sec^3\chi.$$

$$\log N \sin 1'' = \frac{a \sin 1''}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = [1{,}4901841.006] \sec\chi.$$

$$e\sin\varphi = [8{,}9095925.200 - 10] \sin\varphi = \sin\chi.$$

Für $\varphi_0 = 51° \; 19' \; 6{,}''509$ ist $x_0^m = 0$. Für das dem φ_0 zunächstliegende $\varphi_t = 51° \; 20'$ ist $\varphi_t - \varphi_0 = 53{,}''491$, $\frac{1}{2}(\varphi_t + \varphi_0) = 51° \; 19{,}'5543$ und demnach

$$x_t^m = 53{,}491 \cdot (R \sin 1'')_{\varphi_t\varphi_0} = [1{,}7282807.170] (R \sin 1'')_{\varphi_t\varphi_0}.$$

Ein in Meter ausgedrückter Meridianbogen von 10′ zwischen den entsprechenden Breiten φ_1 und φ ist

$$x_1^m - x^m = [2{,}7781512.504] \; (R \sin 1'')_{\varphi_1\varphi}.$$

II.

Für α, β, γ ist nach Seite 84 das Argument $\log\left(\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cos m\right)$, für α', β' aber $\log\left(\frac{\sqrt{0{,}75\,e^2}}{\sqrt{1-0{,}75\,e^2}}\cos m\right)$, worin m eine Funktion der geographischen Breite und des Azimuts bedeutet. Soll die Tafel erst von $\varphi = 36°$ an in zunehmenden Breiten benutzt werden, so liegen alle Argumente zwischen den Grenzwerten 8,620 und 8,920. Lässt man nun die Argumente von 8,620 an in Intervallen von 0,001 bis zu 8,920 wachsen, so findet man die zugehörigen α, β, γ bezw. α', β' in folgender Weise. Setzt man das Argument für α, β, γ allgemein gleich log tang E und $p = \text{tang}^2 \frac{1}{2} E$, so hat man

$$\log\alpha = \log\frac{1}{\sin 1''} - Mp - \tfrac{3}{4}Mp^2 - \tfrac{1}{3}Mp^3 \ldots$$

$$\log\beta = \log\frac{1}{\sin 1''} + \log p - \tfrac{1}{4}Mp^2 \ldots$$

$$\log\gamma = \log\tfrac{1}{8} + \log\beta + \log p \ldots,$$

oder für die Constanten die Logarithmen eingesetzt

$$\log\alpha = 5{,}3144251.332 - [9{,}6377843.113 - 10]p - [9{,}5128456 - 10]p^2 - [9{,}16066 - 10]p^3 \ldots$$

$$\log\beta = 5{,}3144251.332 + \log p - [9{,}0357243 - 10]p^2 \ldots$$

$$\log\gamma = 9{,}0969100 - 10 + \log\beta + \log p \ldots$$

Setzt man als Argument für α', β' aber log tang E' und $q = \text{tang}^2 \frac{1}{2} E'$, so ist

$$\alpha' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}q = 0{,}5 - [9{,}5228787.453 - 10]q$$

$$\beta' = \frac{1}{3\sin 1''}q - \frac{2}{9\sin 1''}q^2 = [4{,}8373039]\,q - [4{,}66121]q^2.$$

III.

Für das Argument log ω = 6,00 bis 8,600 sind die Formeln zur Berechnung der (τ) und $(\sigma) = \frac{1}{3}(\tau)$ bereits Seite 71, 1) bis 8) entwickelt worden. Setzt man jedoch die Kenntnis, der logarithmisch-trigonometrischen Reihen voraus, so gestaltet sich die Berechnung in folgender Weise. Gegeben sind die Reihen:

$$\log \sin \omega = \log \omega - \tfrac{1}{6} M\omega^2 - \frac{1}{36.5} M\omega^4 - \frac{1}{135.21} M\omega^6 - \ldots$$

$$\tfrac{1}{3} \log \cos \omega = \qquad - \tfrac{1}{6} M\omega^2 - \frac{1}{36} M\omega^4 - \frac{1}{135} M\omega^6 - \ldots$$

$$\log \sin \omega = \log \omega - \tfrac{1}{3} \operatorname{cpl} \log \cos \omega + \frac{4}{5M} (\tfrac{1}{6} M\omega^2)^2$$

$$= \log \omega - \tfrac{1}{3} \operatorname{cpl} \log \cos \omega + \frac{4}{5M} (\tfrac{1}{3} \operatorname{cpl} \log \cos \omega)^2$$

$$= \log \omega \qquad - (\sigma - [0{,}26531]\sigma^2) = \log \omega - (\sigma).$$

$$\log \operatorname{tang} \omega = \log \omega + 3\sigma - (\sigma - [0{,}26531]\sigma^2) = \log \omega + (\tau).$$

In betreff der Benutzung von log ω^m als Argument möge hier nochmals erwähnt werden, dass die Tafelargumente der Spalte 3 genau genommen nur für die geographische Breite von Berlin richtig sind. Für den Gebrauch in anderen Breiten sind an die Tafelwerte von log ω^m noch folgende Correctionen, ausgedrückt in Einheiten der 5. Decimale, anzubringen:

φ		φ		φ		φ		φ		φ	
36°	−83	42°	−53	48°	−23	54°	+ 7	60°	+35	66°	+60
38°	−73	44°	−43	50°	−13	56°	+17	62°	+44	68°	+67
40°	−63	46°	−33	52°	− 3	58°	+26	64°	+52	70°	+74.

Berichtigungen.

Seite 1. Zeile 3 v. u. lies „1801“ statt „1802“.

„ 3. Zeile 22 und 23 v. o. muss es heissen: . . . Netzes von Hannover aus den Jahren 1825 und 1829 bis 1835, ebenfalls eine, 1835 bis 1837 ausgeführte, . . .

„ 6. Zeile 7 v. u. lies „Landschieder“ statt „Landschinder“.

„ 37. Zeile 18 bis 23 v. o. ist an Stelle des Textes von „Legt man . . . bis . . . also Querschnitt.“ zu setzen: „Legt man durch einen Punkt P' und den Mittelpunkt einer Parallelellipse eine Ebene, welche auch den Mittelpunkt des Sphäroids enthält, so ist sie senkrecht zu den Ebenen der Parallel- und der Meridianellipse. Ihr Durchschnittspunkt F mit der letzteren möge die Breite f haben. Wegen der Ähnlichkeit und der ähnlichen Lage beider Ellipsen wird alsdann die Normale in F der Normalen zur Parallelellipse in P' parallel sein“.

„ 55. In der Anmerkung, Zeile 2, lies „Längen“ statt „Ausdehnungscoefficienten“.

„ 72. Zeile 2 v. u. lies „P_1F'“ statt „PF'“.

„ 74. Zeile 7 v. u. lies „20.“ statt „(20.)“.

„ 76. Zeile 2 v. u. lies im Nenner „$\cos \frac{1}{3} \varepsilon$“ statt „$\cos \frac{1}{3}$“.

„ 92. In den Beispielen 7. und 8. ist zu setzen:

$(\tau)_{l''} - (\tau)_{y^m} = +150.9$ statt $+148.9$; $(\tau)_{l_1''} - (\tau)_{y_1^m} = +175.0$ statt $+172.8$;

$(\tau)_{y^m} = +105.6$ statt $+107.8$; $(\tau)_{y_1^m} = +122.8$ statt 125.5.

Infolge hiervon ändern sich auch $\log y^m$, $\log \gamma''$, $\log y_1^m$ und $\log \gamma_1''$ entsprechend, und es ergiebt sich

$$y^m = -54483,^m185 \text{ statt } -54483,160,$$
$$y_1^m = -58761,808 \text{ statt } -58761,478,$$

während die absoluten Werte von γ und γ_1 um 0,″001 kleiner werden.

„ 92. Spalte 2, Zeile 7 v. u. lies „$\log l_1''$“ statt „$\log l''$“.

„ 95. Infolge der vorerwähnten Berichtigungen für die Beispiele 7. und 8. auf Seite 92 sind im 10. Beispiel die absoluten Werte von γ und γ_1 sowie ϱ und ϱ_1 um 0,″001 zu verkleinern. Ferner fehlt in der 1. Spalte hinter dem cpl log p^m das Zeichen n.

„ 128. Zeile 5 v. u. Anmerkung. Der aufgenommene Wert des Verwandlungslogarithmus der württembergischen Rute in Meter beruht auf der officiellen Bestimmung: 1 Fuss = 127 Par. Linien. In „C. Kohler. Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg. Stuttgart, 1858.“ ist indessen 1 Fuss zu 126,97 Linien angenommen. Hiernach würde der betr. Verwandlungslogarithmus 0,4570073.1 sein.

Druck von P. Stankiewicz' Buchdruckerei in Berlin.

